

İSTATİSTİK FİZİK

DENEY KILAVUZU

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fizik Bölümü

Bu kılavuz, özgün laboratuvar f6y6n6n $\text{\LaTeX}$ ile yeniden d6zenlenmiř s6r6m6d6r.

İÇİNDEKİLER

Deney No : 1.- Chi-Kare Testi (χ^2)	1
Deney No : 2.- Binom Dağılımı-I (İkili Olasılıklar-Para Atışları)	7
Deney No : 3.- Binom Dağılımı-II (Çoklu Olasılıklar-Zar Atışları)	11
Deney No : 4.- Binom Dağılımı-III (Bilgisayar Yardımıyla 0 ile 1 Arasında Rasgele Sayılar)	17
Deney No : 5.- Gauss Dağılımı (Bilgisayar Yardımıyla Para Atışları)	20
Deney No : 6.- Poisson Dağılımı (Bilgisayar Yardımıyla Poker Dizgesinden Maça Kızı Çekilmesi)	28
Deney No : 7.- Otomatik Sıcaklık Kontrolü	33
Deney No : 8.- Paramanyetizma	36
Deney No : 9.- İdeal Gazların Durum Denklemi	39
Deney No : 10.- Brown Molekül Hareketi (İki Boyutlu Kutuda N Molekülün Devinimi İçin Simülasyon)	43
Deney No : 11.- Carnot Isı Makinesi	57
KAYNAKLAR	62

Deney No : 1

Deneyin Adı: Chi-Kare Testi (χ^2)

Kuramsal Bilgiler

Bir deney yapıldığında bir dizi sonuç elde edilir. Olay sayısı ya da kategori sayısı K , deneyde ya da bu deneyin dayandığı kuramda varolan sonuç sayısıdır. Tüm bu sonuçlar belli bir frekans ile ya da belli bir olasılıkla verilebilirler. Olasılıkların toplamı bir (1) olduğuna göre; $K - 1$ tane sonuç belli ise K . hesaplanabileceğinden n serbestlik derecesi için, $n = K - 1$ ifadesi geçerlidir.

Dizide m tane deneysel (ölçülen, gözlenen) değer $O_1, O_2, \dots, O_m$ bulunsun. Bunlara karşılık gelen kuramsal (beklenen, umgu) değerler de $E_1, E_2, \dots, E_m$ olsun. Chi-kare,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (1.1)$$

ifadesinden hesaplanabilir.

Belli bir n serbestlik derecesi için, χ^2 'nin değeri arttıkça F indisi artar, α önem düzeyi azalır. Çizelge 1.3'te χ^2 'nin F indisi değerinden α önem düzeyi şöyle bulunur. $F = 0,050$ için

$$\alpha = 1 - F = 1,000 - 0,050 = 0,950 = \%95,0 \quad (1.2)$$

dir. Öte yandan, aynı önem düzeyi için serbestlik derecesi arttığında χ^2 de artmaktadır. Bu nedenle, yalnızca χ^2 'nin değerine bakılarak kesin bir yorum yapılamaz. Önce χ^2 hesaplanır, serbestlik derecesi tayin edilir, ardından çizelgeden ilgili satırdaki χ^2 değerleri arasından, hesaplanan χ^2 değerinin hemen altındaki ve üstündeki χ^2 değerleri saptanır. Böyle bir işlemde χ^2 'nin sıfıra yakın bir değerde çıkmasına bakılarak deney-kuram uyuşması konusunda yorum yapılamaz. Belli bir serbestlik derecesi için, yukarıdaki gibi hesaplanan önem düzeyinin bire, yani %100'e yakın olması esas alınarak yorum yapılmalıdır. Önem düzeyi için (1.2) ifadesindeki değer elde edilmiş ise, deney ile kuramın %95 uyduğu söylenebilir.

Örnek

Dört para ile yazı-tura atma deneyinde 128 kez atış yapılıyor. Binom Dağılımı'na göre kuramsal bağıl frekanslar (kombinezonlar, çakışma fonksiyonunun değerleri) Çizelge 1.1'deki gibidir.

Çizelge 1.1. Dört para için mümkün durumlar.

Yazı	Tura	Bağıl frekans (BF)
4	0	1
3	1	4
2	2	6
1	3	4
0	4	1

$\Sigma BF = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ dır. Deney $16 \times 8 = 128$ kez yapılmıştır. Öyleyse bu deney için kuramsal frekanslar Çizelge 1.2'deki gibi olacaktır (Kuramsal frekans = Bağıl frekans x 8).

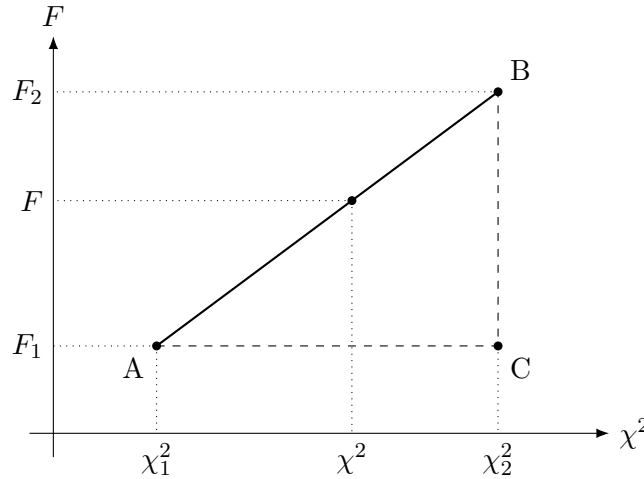
Çizelge 1.2. Kuramsal ve deneysel frekanslar.

Olay No (i)	Yazı	Tura	Kuramsal Frekans (E_i)	Deneysel Frekans (O_i)
1	4	0	8	9
2	3	1	32	34
3	2	2	48	44
4	1	3	32	33
5	0	4	8	8
TOPLAM			128	128

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(9 - 8)^2}{8} + \frac{(34 - 32)^2}{32} + \frac{(44 - 48)^2}{48} + \frac{(33 - 32)^2}{32} + \frac{(8 - 8)^2}{8}$$

$$= 0,125 + 0,125 + 0,333 + 0,0313 + 0 = 0,614$$

Kategori sayısı $K = 5$ ve serbestlik derecesi $n = K - 1 = 5 - 1 = 4$ olup Çizelge 1.3'teki ilgili satırdan görüleceği üzere, hesaplanan χ^2 değeri, $\chi_{0,025}^2 = 0,484$ ile $\chi_{0,050}^2 = 0,711$ değerleri arasında kalmaktadır. Burada $F_1 = 0,025$ ve $F_2 = 0,050$ 'dir. Öyleyse, kaba bir yaklaşımla α önem düzeyi, $\alpha = 1 - 0,050 = 0,950 = \%95,0$ olmaktadır. Buradan, en kaba durumda deney ile kuramın $\%95$ uyduğu söylenebilir.



Şekil 1.1.

Sağlıklı bir χ^2 -testi, çizelgede bulunan iki değer arasında interpolasyon yapılarak gerçekleştirilir (Şekil 1.1). Bu amaçla aşağıdaki ifade kullanılır (ABC üçgeninde Thales bağıntısı).

$$\frac{F - F_1}{F_2 - F_1} = \frac{\chi^2 - \chi_1^2}{\chi_2^2 - \chi_1^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{F - 0,025}{0,050 - 0,025} = \frac{0,614 - 0,484}{0,711 - 0,484}$$

$$F - 0,025 = 0,025 \cdot \frac{0,130}{0,227} = 0,0143$$

$$F = 0,025 + 0,0143 = 0,0393$$

$$\alpha = 1 - F = 1,000 - 0,0393 = 0,9607 = \%96,1$$

olur.

Laboratuvar Çalışması

Aşağıda iki ayrı deneyin sonuçları verilmiştir. Bunlara χ^2 -testini uygulayınız.

1-) Bir zarın 120 kez atılmasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Zarın Yüzü	1	2	3	4	5	6
Gözlenen Frekans	23	17	15	24	17	24
Kuramsal Frekans						

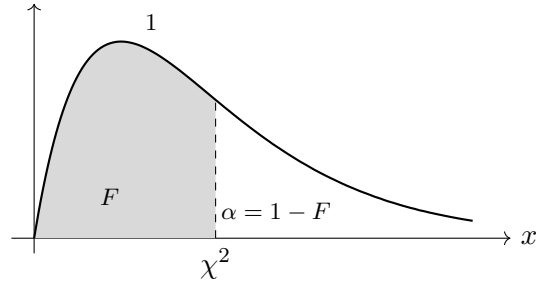
2-) Dört para 320 kez atılmıştır. Her kez kaç yazı geldiği sayılıyor. Deney sonuçları aşağıda verilmiştir:

Yazı Sayısı	0	1	2	3	4
Gözlenen Frekans	22	85	113	83	17
Kuramsal Frekans					

DİKKAT! Herhangi bir kategori sayısı için deneysel ya da kuramsal frekans sekizin altında ise böyle olayların ikisi-üçü bir araya toplanır ve bunlara tek olay gözü ile bakılır. Bu durumda serbestlik derecesi azalır.

χ^2 -DAĞILIMI (CHI-SQUARE DISTRIBUTION)

F : indis (taralı alan)
 α : önem düzeyi ($1 - F$)
1 : toplam alan



$$F(\chi^2) = \int_0^{\chi^2} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-x/2} dx$$

Çizelge 1.3. χ^2 -testi değerlendirme çizelgesi ($n = 1-50$).

n	$\chi^2_{0,005}$	$\chi^2_{0,010}$	$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,050}$	$\chi^2_{0,100}$	$\chi^2_{0,250}$	$\chi^2_{0,500}$	$\chi^2_{0,750}$	$\chi^2_{0,900}$	$\chi^2_{0,950}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,990}$	$\chi^2_{0,995}$
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
31	14,5	15,7	17,5	19,3	21,4	25,4	30,3	35,9	41,4	45,0	48,2	52,2	55,0
32	15,1	16,4	18,3	20,1	22,3	26,3	31,3	37,0	42,6	46,2	49,5	53,5	56,3
33	15,8	17,1	19,0	20,9	23,1	27,2	32,3	38,1	43,7	47,4	50,7	54,8	57,6
34	16,5	17,8	19,8	21,7	24,0	28,1	33,3	39,1	44,9	48,6	52,0	56,1	59,0
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	29,1	34,3	40,2	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3
36	17,9	19,2	21,3	23,3	25,6	30,0	35,3	41,3	47,2	51,0	54,4	58,6	61,6
37	18,6	20,0	22,1	24,1	26,5	30,9	36,3	42,4	48,4	52,2	55,7	59,9	62,9
38	19,3	20,7	22,9	24,9	27,3	31,8	37,3	43,5	49,5	53,4	56,9	61,2	64,2
39	20,0	21,4	23,7	25,7	28,2	32,7	38,3	44,5	50,7	54,6	58,1	62,4	65,5
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	33,7	39,3	45,6	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
41	21,4	22,9	25,2	27,3	29,9	34,6	40,3	46,7	52,9	56,9	60,6	65,0	68,1
42	22,1	23,7	26,0	28,1	30,8	35,5	41,3	47,8	54,1	58,1	61,8	66,2	69,3
43	22,9	24,4	26,8	29,0	31,6	36,4	42,3	48,8	55,2	59,3	63,0	67,5	70,6
44	23,6	25,1	27,6	29,8	32,5	37,4	43,3	49,9	56,4	60,5	64,2	68,7	71,9
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	38,3	44,3	51,0	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2
46	25,0	26,7	29,2	31,4	34,2	39,2	45,3	52,1	58,6	62,8	66,6	71,2	74,4
47	25,8	27,4	30,0	32,3	35,1	40,1	46,3	53,1	59,8	64,0	67,8	72,4	75,7
48	26,5	28,2	30,8	33,1	35,9	41,1	47,3	54,2	60,9	65,2	69,0	73,7	77,0
49	27,2	28,9	31,6	33,9	36,8	42,0	48,3	55,3	62,0	66,3	70,2	74,9	78,2
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5

Çizelge 1.3 (devamı). χ^2 -testi değerlendirme çizelgesi ($n = 51-100$).

n	$\chi^2_{0,005}$	$\chi^2_{0,010}$	$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,050}$	$\chi^2_{0,100}$	$\chi^2_{0,250}$	$\chi^2_{0,500}$	$\chi^2_{0,750}$	$\chi^2_{0,900}$	$\chi^2_{0,950}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,990}$	$\chi^2_{0,995}$
51	28,7	30,5	33,2	35,6	38,6	43,9	50,3	57,4	64,3	68,7	72,6	77,4	80,7
52	29,5	31,2	34,0	36,4	39,4	44,8	51,3	58,5	65,4	69,8	73,8	78,6	82,0
53	30,2	32,0	34,8	37,3	40,3	45,7	52,3	59,5	66,5	71,0	75,0	79,8	83,3
54	31,0	32,8	35,6	38,1	41,2	46,7	53,3	60,6	67,7	72,2	76,2	81,1	84,5
55	31,7	33,6	36,4	39,0	42,1	47,6	54,3	61,7	68,8	73,3	77,4	82,3	85,7
56	32,5	34,3	37,2	39,8	42,9	48,5	55,3	62,7	69,9	74,5	78,6	83,5	87,0
57	33,2	35,1	38,0	40,6	43,8	49,5	56,3	63,8	71,0	75,6	79,8	84,7	88,2
58	34,0	35,9	38,8	41,5	44,7	50,4	57,3	64,9	72,2	76,8	80,9	86,0	89,5
59	34,8	36,7	39,7	42,3	45,6	51,4	58,3	65,9	73,3	77,9	82,1	87,2	90,7
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	52,3	59,3	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
61	36,3	38,3	41,3	44,0	47,3	53,2	60,3	68,0	75,5	80,2	84,5	89,6	93,2
62	37,1	39,1	42,1	44,9	48,2	54,2	61,3	69,1	76,6	81,4	85,7	90,8	94,4
63	37,8	39,9	43,0	45,7	49,1	55,1	62,3	70,2	77,7	82,5	86,8	92,0	95,6
64	38,6	40,6	43,8	46,6	50,0	56,1	63,3	71,2	78,9	83,7	88,0	93,2	96,9
65	39,4	41,4	44,6	47,4	50,9	57,0	64,3	72,3	80,0	84,8	89,2	94,4	98,1
66	40,2	42,2	45,4	48,3	51,8	57,9	65,3	73,3	81,1	86,0	90,3	95,6	99,3
67	40,9	43,0	46,3	49,2	52,7	58,9	66,3	74,4	82,2	87,1	91,5	96,8	101
68	41,7	43,8	47,1	50,0	53,5	59,8	67,3	75,5	83,3	88,3	92,7	98,0	102
69	42,5	44,6	47,9	50,9	54,4	60,8	68,3	76,5	84,4	89,4	93,9	99,2	103
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	61,7	69,3	77,6	85,5	90,5	95,0	100	104
71	44,1	46,2	49,6	52,6	56,2	62,6	70,3	78,6	86,6	91,7	96,2	102	105
72	44,8	47,1	50,4	53,5	57,1	63,6	71,3	79,7	87,7	92,8	97,4	103	107
73	45,6	47,9	51,3	54,3	58,0	64,5	72,3	80,7	88,8	93,9	98,5	104	108
74	46,4	48,7	52,1	55,2	58,9	65,5	73,3	81,8	90,0	95,1	99,7	105	109
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	66,4	74,3	82,9	91,1	96,2	101	106	110
76	48,0	50,3	53,8	56,9	60,7	67,4	75,3	83,9	92,2	97,4	102	108	111
77	48,8	51,1	54,6	57,8	61,6	68,3	76,3	85,0	93,3	98,5	103	109	113
78	49,6	51,9	55,5	58,7	62,5	69,3	77,3	86,0	94,4	99,6	104	110	114
79	50,4	52,7	56,3	59,5	63,4	70,2	78,3	87,1	95,5	101	105	111	115
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	71,1	79,3	88,1	96,6	102	107	112	116
81	52,0	54,4	58,0	61,3	65,2	72,1	80,3	89,2	97,7	103	108	114	118
82	52,8	55,2	58,8	62,1	66,1	73,0	81,3	90,2	98,8	104	109	115	119
83	53,6	56,0	59,7	63,0	67,0	74,0	82,3	91,3	99,9	105	110	116	120
84	54,4	56,8	60,5	63,9	67,9	74,9	83,3	92,3	101	106	111	117	121
85	55,2	57,6	61,4	64,7	68,8	75,9	84,3	93,4	102	108	112	118	122
86	56,0	58,5	62,2	65,6	69,7	76,8	85,3	94,4	103	109	114	119	124
87	56,8	59,3	63,1	66,5	70,6	77,8	86,3	95,5	104	110	115	121	125
88	57,6	60,1	63,9	67,4	71,5	78,7	87,3	96,5	105	111	116	122	126
89	58,4	60,9	64,8	68,2	72,4	79,7	88,3	97,6	106	112	117	123	127
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	80,6	89,3	98,6	108	113	118	124	128
91	60,0	62,6	66,5	70,0	74,2	81,6	90,3	99,7	109	114	119	125	129
92	60,8	63,4	67,4	70,9	75,1	82,5	91,3	101	110	115	120	126	131
93	61,6	64,2	68,2	71,8	76,0	83,5	92,3	102	111	117	122	128	132
94	62,4	65,1	69,1	72,6	76,9	84,4	93,3	103	112	118	123	129	133
95	63,2	65,9	69,9	73,5	77,8	85,4	94,3	104	113	119	124	130	134
96	64,1	66,7	70,8	74,4	78,7	86,3	95,3	105	114	120	125	131	135
97	64,9	67,6	71,6	75,3	79,6	87,3	96,3	106	115	121	126	132	137
98	65,7	68,4	72,5	76,2	80,5	88,2	97,3	107	116	122	127	133	138
99	66,5	69,2	73,4	77,0	81,4	89,2	98,3	108	117	123	128	135	139
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109	118	124	130	136	140

Deney No : 2

Deneyin Adı: Binom Dağılımı-I (İkili Olasılıklar-Para Atışları)

Kuramsal Bilgiler

N tane para içeren ideal bir sistem göz önüne alınır. Her bir para atışı sonunda ya “yazı” ya da “tura” gelecektir. Dikkati herhangi tek bir para üzerinde toplayarak, p ile yazı, q ile de tura gelme (yazı gelmemesi) olasılığını gösterelim. Paranın dik gelme olasılığı önemsiz olduğu için, bu iki olasılık tüm olasılıkları içerir. Böylece normalizasyon koşulu,

$$p + q = 1 \quad (2.1)$$

ya da $q = 1 - p$ sonucunu verir. Paranın geometrik merkezi ağırlık merkezi ile çakışık varsayılabilmesi için teorik mekanik yasalarına göre, simetri nedeniyle tercihli yönelme sözkonusu olamaz. O zaman $p = q = 1/2$ 'dir. Sistem ideal olduğu için paralar arasındaki etkileşme hemen hemen önemsizdir ve böylece yönelmeler istatistik bağımsız alınabilir. Bu nedenle verilen herhangi bir paranın yazı gelme olasılığını, sistemdeki başka bir paranın yazı ya da tura gelme olasılığı etkilemeyecektir.

Para sisteminin N ögesi arasında yazı gelenlerin sayısı n ile, tura gelenlerin sayısı da n' ile gösterilsin. Açıkça;

$$n + n' = N \quad (2.2)$$

ve böylece $n' = N - n$ olur.

Şimdi N paralı sistemden oluşan $\mathcal{N}$ ögesi (ya da $\mathcal{N}$ atış) istatistik kümeyi göz önüne alalım. Yazı gelen paraların n sayısı her atışta aynı değildir, fakat $n = 0, 1, 2, \dots, N$ olası değerlerden birini alabilir. Bu durumda ilgi çekici soru şudur: n 'nin her olası değeri için N paradan n tanesinin yazı gelmesinin $P(n)$ olasılığı nedir?

Bu sorunun matematiksel ve fiziksel cevabı, derste Binom Dağılımı konusu işlenirken elde edilmektedir. İstenen olasılık “Binom Dağılımı” ile verilir,

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (2.3)$$

dir ve $p = q = 1/2$ olduğu için, para atışlarında,

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} (1/2)^N \quad (2.4)$$

şeklini alır.

$\mathcal{N}$ atışta n 'nin belirli bir değeri aldığı atış sayısına “frekans” denir ve $F(n)$ ile gösterilir. Dağılımdaki

$$C_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (2.5)$$

ya da

$$C_N(n) = P_N(n) \cdot 2^N \quad (2.6)$$

katsayısına “bağıl frekans” ya da “kombinezon” denir. Burada

$$2^N = \sum C_N(n) \quad (2.7)$$

dir.

Deneyin Yapılışı

İki Para İle Atışlar

Deneye başlamadan önce, Çizelge 2.2'deki kuramsal sütunları aşağıdaki sırayı takip ederek doldurunuz.

- 1) (2.5) ifadesinden yararlanarak kuramsal $C_N(n)$ değerlerini hesaplayınız.
- 2) (2.4) ifadesinden yararlanarak kuramsal $P_N(n)$ olasılıklarını hesaplayınız. Tüm olasılık hesaplarınızı virgülden sonra dört hane yürütünüz.
- 3) $\sum C_N(n)$ değerini bulunuz. Bu değer 2^N 'e eşit mi?
- 4) $F(n) = \frac{\mathcal{N}}{\sum C_N(n)} C_N(n) = \mathcal{N} \cdot P_N(n)$ ifadesinden kuramsal frekans değerlerini, tamsayı olarak, belirleyiniz.
- 5) $F(n)$ değerinin en az 10 olmasına dikkat ediniz. $\mathcal{N}/\sum C_N(n)$ katsayısı 10 seçilerek bu sağlanabilir.

Atış yapacağınız paralara numaralar veriniz. Her kez paraları avucunuzda çalkalayıp atınız. Toplam 200 atış yapınız ($\mathcal{N} = 200$) ve Çizelge 2.1'i oluşturunuz.

Çizelge 2.1. İki para deney verileri.

Atış No	1. Para	2. Para	n	n'
1	Y	T	1	0
2	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
200	..	..	..	..

Atışlarınız tamamlandığında, deney verilerini kullanarak Çizelge 2.2'deki deneysel sütunları aşağıdaki sırayı takip ederek doldurunuz.

- 1) Atışları guruplar halinde sayarak, kaç kez Y-Y ($n = 2$), Y-T ve T-Y ($n = 1$), T-T ($n = 0$) geldiğini belirleyerek, deneysel $F(n)$ frekanslarını belirleyiniz.
- 2) $P_N(n) = \frac{F(n)}{\mathcal{N}}$ ifadesinden yararlanarak, deneysel olasılıkları hesaplayınız. Tüm olasılık hesaplarınızı virgülden sonra dört hane yürütünüz.

Çizelge 2.2. İki para ile atışlar için değerlendirme.

DURUMLAR				KURAMSAL			DENEYSEL	
1.para	2.para	n	n'	$C_2(n)$	$F(n)$	$P_2(n)$	$F(n)$	$P_2(n)$
Y	Y	2	0					
Y	T	1	1					
T	Y							
T	T	0	2					
TOPLAM								

Y-Y gelme olasılığının kuramsal olarak 1/4 ve T-T gelme olasılığının 1/4 olduğu açıktır. Şimdi 200 atışınızı tarayarak, bir Y-Y gelişinin hemen ardından T-T geliş durumu deneysel frekansını bulunuz (F_B). Kuramsal olarak bağlı olasılıklar ilkelerine göre; $P_B = P_2(2) \cdot P_2(0) =$

$0,2500 \cdot 0,2500 = 0,0625$ 'dir. Buna göre; elde edilen bu kuramsal olasılık, $F_B/200$ 'e eşit olmalıdır. Öyle mi? Sonucunuzu yorumlayınız.

Bu deneye χ^2 -testini uygulayınız ve sonucu yorumlayınız. Kuramsal ve deneysel frekansları birlikte bir çubuk diyagramında gösteriniz.

Bilgisayarda Beş Para İle Atışlar

Para atışları bilgisayar ile de yapılabilir. Böylece, daha kısa sürede, daha büyük $\mathcal{N}$ atış sayıları gerçekleştirilebilir. Hatta, sistemdeki öge sayısı da arttırılabilir. Böylece, kuramsal ve deneysel sonuçların daha büyük bir doğrulukla uyuşması sağlanabilir.

Beş paralı bir topluluk düşününüz ($N = 5$). Her atışta yazı gelen para sayısı n ile gösterilsin. Doğal olarak $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ değerlerinden birini alacaktır ve $2^N = 2^5 = 32$ farklı şekillenim söz konusu olacaktır.

Deneye başlamadan önce, Çizelge 2.3'teki kuramsal sütunları aşağıdaki sırayı takip ederek doldurunuz.

1) (2.4) ifadesinden yararlanarak kuramsal $P_N(n)$ olasılıklarını hesaplayınız. Tüm olasılık hesaplarınızı virgülden sonra dört hane yürütünüz.

2) $F(n) = \mathcal{N} \cdot P_N(n)$ ifadesinden kuramsal frekans değerlerini, tamsayı olarak, belirleyiniz.

Bilgisayar programında, iki farklı atış sayısı $\mathcal{N} = 3200$ ve $\mathcal{N} = 32000$ için çalışınız. Deneysel frekansları bilgisayar size verecektir, $P_N(n) = F(n)/\mathcal{N}$ ifadesinden yararlanarak, deneysel olasılıkları hesaplayınız. Tüm olasılık hesaplarınızı virgülden sonra dört hane yürütünüz ve Çizelge 2.3'teki deneysel sütunları oluşturunuz.

Çizelge 2.3. Beş para ile atışlar için değerlendirme.

n	n'	$\mathcal{N} = 3200$				$\mathcal{N} = 32000$			
		KURAMSAL $P_5(n)$	DENEYSEL $F(n)$	DENEYSEL $F(n)$	DENEYSEL $P_5(n)$	KURAMSAL $P_5(n)$	DENEYSEL $F(n)$	DENEYSEL $F(n)$	DENEYSEL $P_5(n)$
0	5								
1	4								
2	3								
3	2								
4	1								
5	0								
TOPLAM									

Bu deneye χ^2 -testini uygulayınız, kuramsal ve deneysel frekanslarınız için birer çubuk diyagramı çiziniz. Sonuçlarınızı yorumlayınız.

Bilgisayar Programı

Bu deneyde “Bilgisayarda Beş Para İle Atışlar” bölümünde kullanılan bilgisayar programı, özgün kılavuzda BASIC dilinde yazılmıştır. Aşağıda bu programın Python diline aktarılmış hâli verilmiştir. Program, N tane paranın N kez atılması deneyini simüle eder ve her atışta kaç tane “yazı” geldiğinin deneysel frekans dağılımını ($F(n)$) hesaplar.

```
1 import random
2
3
4 def coklu_para_atislari(deney_sayisi, para_sayisi):
5     """N tane paranin deney_sayisi kez atilmasini simule eder.
6
7     deney_sayisi : kac kez N-para deneyinin tekrarlanacagi (ozgun
8         kilavuzdaki 'N' = N)
9     para_sayisi : bir defada atilan para sayisi (N)
10
11     Donen deger: R[n] = n tane yazi gelen atisin frekansi
12         (n = 0, 1, ..., para_sayisi)
13     """
14     R = [0] * (para_sayisi + 1)
15     for _ in range(deney_sayisi):
16         yazi_sayisi = 0
17         for _ in range(para_sayisi):
18             # 0: yazi, 1: tura (esit olasilikli)
19             if random.randint(0, 1) == 0:
20                 yazi_sayisi += 1
21             R[yazi_sayisi] += 1
22     return R
23
24
25 def sonuclari_yazdir(deney_sayisi, para_sayisi, R):
26     print(f"MAJISKUL N = {deney_sayisi} PARA SAYISI N = {para_sayisi}")
27     print(f"{'DENEYSEL':>30}")
28     print(f"{'FREKANS':>30}")
29     print("=" * 24)
30     for n in range(para_sayisi + 1):
31         yazi, tura = para_sayisi - n, n
32         print(f"{yazi} Y {tura} T ==> F({n}) = {R[n]}")
33
34
35 if __name__ == "__main__":
36     N_deney = int(input("MAJISKUL N (deney sayisi) = "))
37     N_para = int(input("PARA SAYISI N = "))
38     R = coklu_para_atislari(N_deney, N_para)
39     sonuclari_yazdir(N_deney, N_para, R)
```

Program 2.1. Binom Dağılımı-I – Çoklu Para Atışları.

Python dosyasını indir: Google Drive'dan indir

Deney No : 3

Deneyin Adı: Binom Dağılımı-II (Çoklu Olasılıklar-Zar Atışları)

Kuramsal Bilgiler

N tane zar içeren ideal bir sistem göz önüne alınır. Her bir zarın altı yüzünden her biri eşit olasılıkla gelecektir. Dikkati herhangi tek bir zar üzerinde toplayarak, p ile “6” gelmesi, q ile de “6” gelmemesi olasılığını gösterelim. Normalizasyon koşulu,

$$p + q = 1 \quad (3.1)$$

ya da $q = 1 - p$ sonucunu verir.

Zarlar hilesiz ve ağırlıksız ise tercihli bir yönelme söz konusu olamaz. Buna göre; $p = 1/6$ ve $q = 1 - 1/6 = 5/6$ olur. Sistem ideal olduğu için zarlar arasındaki etkileşme hemen hemen önemsizdir. Bu nedenle verilen herhangi bir zarın “6” gelmesi olasılığını, sistemdeki başka bir zarın “6” ya da başka bir değerde gelmesi etkilemeyecektir.

Zar sisteminin N ögesi arasında “6” gelenlerin sayısı n ile, “6” gelmeyenlerin sayısı da n' ile gösterilsin. Açıkça;

$$n + n' = N \quad (3.2)$$

dir ve böylece $n' = N - n$ olur.

Şimdi N zarlı sistemden oluşan $\mathcal{N}$ ögeli (ya da $\mathcal{N}$ atışlı) istatistik kümeyi göz önüne alalım. “6” gelenlerin n sayısı her atışta aynı değildir, fakat $n = 0, 1, 2, \dots, N$ olası değerden herhangi birini alabilir. Bu durumda ilgi çekici soru şudur: n 'nin her olası değeri için N zardan n tanesinin “6” gelmesinin $P(n)$ olasılığı nedir? Bu sorunun matematiksel ve fiziksel cevabı, derste Binom Dağılımı konusu işlenirken elde edilmektedir:

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (3.3)$$

dir. Burada $p = 1/6$ ve $q = 5/6$ olduğu için

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{5^{N-n}}{6^N} \quad (3.4)$$

şeklini alır. Bağlı frekans ise

$$C_N(n) = P_N(n) \cdot 6^N \quad (3.5)$$

ile verilir. Burada $6^N = \sum C_N(n)$ 'dir.

Deneyin Yapılışı

1. Değerlendirme (İki zar için, zarların hiçbirinde, bir tanesinde, her ikisinde de “6” gelmesi)

Deneye başlamadan önce Çizelge 3.2’deki kuramsal sütunları aşağıdaki sırada doldurunuz. Tüm olasılıkları virgülden sonra dört hane yürütünüz.

- 1) (3.4) ifadesinden kuramsal $P_N(n)$ olasılıklarını hesaplayınız.
- 2) (3.5) ifadesinden kuramsal $C_N(n)$ değerlerini hesaplayınız.
- 3) $\sum C_N(n)$ değerini bulunuz. Bu değer 6^N ’e eşit olmalıdır.
- 4) $F(n) = \mathcal{N} \frac{C_N(n)}{\sum C_N(n)} = \mathcal{N} \cdot P_N(n)$ ifadesinden kuramsal frekansları, tamsayı olarak, belirleyiniz.

Atış yapacağınız zarlara numara veriniz. Her seferinde zarları avucunuzda çalkalayıp atınız. Toplam 360 atış yapınız ($\mathcal{N} = 360$, Niçin?). Çizelge 3.1’i oluşturunuz.

Çizelge 3.1. İki zar atışı deney verileri.

Atış No	1. zar	2. zar	n	Toplam
1	..	..	..	..
2	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
360	..	..	..	..

Gelebilecek durumlar; 1-1, 1-2,, 1-6; 2-1, 2-2,, 2-6;; 6-1, 6-2,, 6-6 olmak üzere 36 farklı şekillenim içerir. Çizelge 3.2’den görüldüğü gibi, guruplandırmada, önce “6” bulunmayan, sonra bir tane “6” bulunan ve en son da her iki zarın da “6” geldiği şekillenimler yerleştirilmiştir.

Deney verilerini kullanarak, Çizelge 3.2’deki deneysel sütunları aşağıdaki sırada doldurunuz.

- 1) Deneysel $F(n)$ frekanslarını tayin ediniz.
- 2) $P_N(n) = F(n)/\mathcal{N}$ ifadesinden yararlanarak, deneysel olasılıkları hesaplayınız. Olasılıkları virgülden sonra dört hane yürütünüz.

Çizelge 3.2. İki zar atışları için 1. değerlendirme.

DURUMLAR				KURAMSAL			DENEYSEL	
1. zar	2. zar	n	n'	$C_2(n)$	$F(n)$	$P_2(n)$	$F(n)$	$P_2(n)$
1	1	0	2					
1	2	0	2					
2	1	0	2					
1	3	0	2					
3	1	0	2					
1	4	0	2					
4	1	0	2					
1	5	0	2					
5	1	0	2					
2	2	0	2					
2	3	0	2					
3	2	0	2					
2	4	0	2					
4	2	0	2					
2	5	0	2					
5	2	0	2					
3	3	0	2					
3	4	0	2					
4	3	0	2					
3	5	0	2					
5	3	0	2					
4	4	0	2					
4	5	0	2					
5	4	0	2					
5	5	0	2					
1	6	1	1					
6	1	1	1					
2	6	1	1					
6	2	1	1					
3	6	1	1					
6	3	1	1					
4	6	1	1					
6	4	1	1					
5	6	1	1					
6	5	1	1					
6	6	2	0					

2. Değerlendirme (iki zarın toplamının 2, 3, 4,, 12 olması)

Bu çalışmada atışlar bilgisayar ortamında yapılacaktır. Deneye başlamadan önce, Çizelge 3.4'ün kuramsal sütunlarını Çizelge 3.3'teki örnek uzayından yararlanarak doldurunuz.

Çizelge 3.3. İki zarın toplamına ilişkin örnek uzay.

		2.ZAR					
		1	2	3	4	5	6
1.ZAR	1	2 (1,1)	3 (1,2)	4 (1,3)	5 (1,4)	6 (1,5)	7 (1,6)
	2	3 (2,1)	4 (2,2)	5 (2,3)	6 (2,4)	7 (2,5)	8 (2,6)
	3	4 (3,1)	5 (3,2)	6 (3,3)	7 (3,4)	8 (3,5)	9 (3,6)
	4	5 (4,1)	6 (4,2)	7 (4,3)	8 (4,4)	9 (4,5)	10 (4,6)
	5	6 (5,1)	7 (5,2)	8 (5,3)	9 (5,4)	10 (5,5)	11 (5,6)
	6	7 (6,1)	8 (6,2)	9 (6,3)	10 (6,4)	11 (6,5)	12 (6,6)

Her hücre bir (1.zar, 2.zar) çiftini gösterir; hücrenin sol-alt köşesindeki küçük sayı o çiftin toplamıdır (1.zar + 2.zar). Aynı toplama sahip hücreler aynı renktedir.

Toplam	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kaç hücre (kombinezon)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Yukarıdaki çizelge, ızgarada her toplam değerine (2'den 12'ye) karşılık kaç hücre (kaç farklı zar çifti) düştüğünü özetler; toplam 36 hücre olduğundan, kuramsal olasılık $P(\text{toplam}) = (\text{kaç hücre})/36$ ile bulunur.

Bilgisayar programında iki farklı atış sayısı, sırasıyla $\mathcal{N} = 3600$ ve $\mathcal{N} = 36000$, giriniz. Deneysel frekansları program size verecektir. $P_N(n) = F(n)/\mathcal{N}$ ifadesinden yararlanarak, deneysel olasılıkları hesaplayınız. Tüm olasılıkları virgülden sonra dört hane yürütünüz ve Çizelge 3.4'teki deneysel sütunları oluşturunuz.

Çizelge 3.4. İki zarın toplamına ilişkin değerlendirme.

Toplam	$\mathcal{N} = 3600$				$\mathcal{N} = 36000$			
	KURAMSAL		DENEYSEL		KURAMSAL		DENEYSEL	
	$P_2(n)$	$F(n)$	$F(n)$	$P_2(n)$	$P_2(n)$	$F(n)$	$F(n)$	$P_2(n)$
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
TOPLAM								

Her iki değerlendirme için, χ^2 -testini uygulayınız ve sonucu yorumlayınız, kuramsal ve deneysel frekansları birlikte bir çubuk diyagramında gösteriniz.

Bilgisayar Programı

“2. Değerlendirme” bölümünde iki zarın toplamının dağılımını bilgisayar ortamında elde etmek için kullanılan özgün BASIC programının Python’a aktarılmış hâli aşağıda verilmiştir. Program, iki zarın N kez atılmasını simüle eder ve her bir toplam değerinin (2’den 12’ye) deneysel frekansını hesaplar.

```
1 import random
2
3
4 def iki_zar_atislari(atis_sayisi):
5     """İki zarın atis_sayisi kez atilmasini simule eder.
6
7     atis_sayisi : kac kez iki zarın birlikte atilacagi (ozgun
8     kilavuzdaki 'N' = N)
9
10    Donen deger: S[toplam] = iki zarın toplamının (2..12) frekansi
11    """
12    S = [0] * 13 # S[0] ve S[1] kullanilmiyor (en kucuk toplam 2'dir)
13    for _ in range(atis_sayisi):
14        zar1 = random.randint(1, 6)
15        zar2 = random.randint(1, 6)
16        S[zar1 + zar2] += 1
17    return S
18
19
20 def sonuclari_yazdir(atis_sayisi, S):
21     print(f"ZAR ATIS SAYISI = {atis_sayisi}")
22     print(f"{'DENEYSEL':^20}")
23     print(f"{'FREKANS':^20}")
24     print("-" * 20)
25     for toplam in range(2, 13):
26         print(f"TOPLAM ({toplam:2d}) ==> {S[toplam]}")
27
28
29 if __name__ == "__main__":
30     N = int(input("ZAR ATIS SAYISI = "))
31     S = iki_zar_atislari(N)
32     sonuclari_yazdir(N, S)
```

Program 3.1. Binom Dağılımı-II – İki Zar İle Atışlar.

Python dosyasını indir: Google Drive'dan indir

Deney No : 4

Deneyin Adı: Binom Dağılımı-III (Bilgisayar Yardımıyla 0 ile 1 Arasında Rasgele Sayılar)

Giriş

0 ile 1 arasında, bir ondalık sayı rasgele seçildiğinde, virgülden sonraki basamakları oluşturan rakamlardan her biri 0, 1, 2, ..., 9 değerlerini, aynı 1/10 olasılığı ile alır. Böyle rasgele seçilen N basamaklı bir ondalık sayı için aşağıdaki değerlendirmeler Binom Dağılımı ile yapılabilir.

Rasgele ondalık sayıları size bilgisayar verecektir. Bu sayıların her biri için, virgülden sonraki basamaklardan; 2 ve 2'den küçük (0, 1, 2) rakama sahip basamak sayısını Çizelge 4.1'de 1. sütuna, 5 ve 5'ten büyük (5, 6, 7, 8, 9) rakama sahip basamak sayısını da aynı çizelgede 2. sütuna işleyiniz.

Çizelge 4.1. Deney verileri.

Sayı No	Sayılar	(1)	(2)
1	0,084257552	3	5
2	0,264982366	2	5
3	0,851031218	5	3
..	..	..	..
..	..	..	..
..	..	..	..
512	..	..	..

1. Değerlendirme

Bu aşamada, “virgülden sonraki N basamaktan n tanesinin 2 ve 2'den küçük rakamlardan oluşmasının olasılığı nedir?” sorusunun cevabı ile ilgilenilecektir.

Ondalık sayı adedi $\mathcal{N} = 512$; öge sayısı $N = 9$; $n = 0, 1, 2, \dots, 9$ 'dur. Virgülden sonraki herhangi bir basamağın 2 ve 2'den küçük gelmesinin olasılığı $p = 3/10 = 0,3$; gelmemesinin olasılığı $q = 7/10 = 0,7$ 'dir (çünkü $p + q = 1$ 'dir). Buna göre istenen olasılık Binom Dağılımı'na uyar.

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (4.1)$$

Her n değeri için $P(n)$ kuramsal değerlerini (4.1) ifadesinden hesaplayınız. Sonuçlarınızı virgülden sonra beş basamak yürütünüz. Bu olasılıkları Çizelge 4.2'ye işleyiniz. Kuramsal frekansları, $F(n) = \mathcal{N} \cdot P(n)$ ifadesinden hesaplayınız ve tamsayı olarak Çizelge 4.2'ye işleyiniz.

Çizelge 4.1'de 1. sütunda yazdığınız n değerlerini, yeniden guruplandırarak, deneysel frekansları Çizelge 4.2'ye işleyiniz. Deneysel olasılıkları, $P(n) = F(n)/\mathcal{N}$ ifadesinden yararlanarak ve virgülden sonra beş basamak yürüterek, Çizelge 4.2'ye işleyiniz.

Çizelge 4.2. 1. Değerlendirme.

n	KURAMSAL		DENEYSEL	
	$P_9(n)$	$F(n)$	$F(n)$	$P_9(n)$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
TOPLAM				

2. Değerlendirme

Bu aşamada, “virgülden sonraki N basamaktan n tanesinin 5 ve 5’ten büyük rakamlardan oluşmasının olasılığı nedir?” sorusunun cevabı ile ilgilenilecektir.

Ondalık sayı adedi yine $\mathcal{N} = 512$; öge sayısı $N = 9$; $n = 0, 1, 2, \dots, 9$ ’dur. Virgülden sonraki herhangi bir basamağın 5 ve 5’ten büyük gelmesinin olasılığı $p = 5/10 = 1/2$; gelmemesinin olasılığı $q = 5/10 = 1/2$ ’dir (çünkü $p+q = 1$ ’dir). Buna göre istenen olasılık Binom Dağılımı’na uyar.

Her n değeri için $P(n)$ kuramsal değerlerini (4.1) ifadesinden hesaplayınız. Sonuçlarınızı virgülden sonra beş basamak yürütünüz. Bu olasılıkları Çizelge 4.3’e işleyiniz. Kuramsal frekansları, $F(n) = \mathcal{N} \cdot P(n)$ ifadesinden hesaplayınız ve tamsayı olarak Çizelge 4.3’e işleyiniz.

Çizelge 4.1’de 2. sütunda yazdığınız n değerlerini, yeniden guruplandırarak, deneysel frekansları Çizelge 4.3’e işleyiniz. Deneysel olasılıkları, $P(n) = F(n)/\mathcal{N}$ ifadesinden yararlanarak ve virgülden sonra beş basamak yürüterek, Çizelge 4.3’e işleyiniz.

Çizelge 4.3. 2. Değerlendirme.

n	KURAMSAL		DENEYSEL	
	$P_9(n)$	$F(n)$	$F(n)$	$P_9(n)$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
TOPLAM				

Her bir değerlendirme için χ^2 -testini uygulayınız, kuramsal ve deneysel frekanslarınız için birer çubuk diyagramı çiziniz. Sonuçlarınızı yorumlayınız.

Bilgisayar Programı

Çizelge 4.1'deki rasgele ondalık sayıları üretmek için kullanılan özgün BASIC programının Python'a aktarılmış hâli aşağıda verilmiştir. Program, 0 ile 1 arasında rasgele ondalık sayılar üretir ve bunları dört sütun hâlinde yazdırır.

```
1 import random
2
3
4 def rasgele_sayilar_uret(satir_sayisi=126, sutun_sayisi=4):
5     """0 ile 1 arasında rasgele ondalık sayılardan olusan bir tablo
6     uretir (satir_sayisi x sutun_sayisi boyutunda)."""
7     return [
8         [random.random() for _ in range(sutun_sayisi)]
9         for _ in range(satir_sayisi)
10    ]
11
12
13 def sonuclari_yazdir(tablo):
14     for satir in tablo:
15         print("".join(f"{deger:<20.9f}" for deger in satir))
16
17
18 if __name__ == "__main__":
19     tablo = rasgele_sayilar_uret()
20     sonuclari_yazdir(tablo)
```

Program 4.1. Binom Dağılımı-III – 0 ile 1 Arasında Rasgele Sayılar.

Python dosyasını indir: Google Drive'dan indir

Deney No : 5

Deneyin Adı: Gauss Dağılımı (Bilgisayar Yardımıyla Para Atışları)

Kuramsal Bilgiler

Daha önce kullanılan,

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (5.1)$$

Binom Dağılımı'nı göz önüne alınız. Burada $q = 1 - p$ 'dir. N büyük olduğunda $P(n)$ olasılığının hesaplanması, büyük sayıların faktöriyelerinin değerini gerektirdiğinden, zorluk yaratır. Bununla birlikte (5.1) ifadesini özel olarak basitleştirmeyi sağlayan yaklaşıklıkları kullanmak mümkündür.

Daha önce Berkeley İstatistik Fizik Kitabı Bölüm 2.3'te açıklanmış olan basitleştirici özellik, $P(n)$ olasılığının N büyük olduğunda çok belirgin bir maksimum göstermesidir. Buna göre; $P(n)$ olasılığı, n sayısı $P(n)$ 'nin maksimum olduğu $n = \tilde{n}$ özel değerinden büyük ölçüde ayrılırsa, önemsenmeyecek kadar küçük olur. Böylece, $P(n)$ olasılığının önemli kaldığı aralık, yalnız n 'nin $\tilde{n}$ 'dan çok aşırı fark etmediği değerlerinden oluşur. Ancak, bu oldukça küçük bölgede $P(n)$ 'ye yaklaşık bir ifade kolayca bulunabilir. Bundan sonra, bu ifade $P(n)$ olasılığının önemsenmeyecek kadar küçük olmadığı n 'nin bütün değerleri için, yani $P(n)$ üzerine bir bilginin genellikle ilginç olduğu bölgede kullanılabilir.

Böylece $P(n)$ 'nin, maksimum olduğu $n = \tilde{n}$ konumu yakınındaki davranışını incelemek yeterlidir. Önce $p \approx 0$ veya $q \approx 0$ olmadıkça, bu $\tilde{n}$ değerinin ne sıfıra ne de N 'ye çok yakın olmadığına dikkat ediniz. Buna göre; N büyük olduğunda, $\tilde{n}$ 'nin kendisi de büyük bir sayıdır. Bunun için $\tilde{n}$ yakınında, ilgilenilen bölgede, n sayıları büyük değerler alır. Ancak n büyük olduğunda $P(n)$, n bir birim değişince, çok az değişir. Yani, $|P(n+1) - P(n)| \ll P(n)$ olur. Buna göre, $P(n)$ n 'nin yavaş değişen bir fonksiyonudur. Bu nedenle $P(n)$ 'ye, yalnız tam değerlerinin fiziksel anlamı olan, sürekli bir n değişkeninin yumuşak bir fonksiyonu gözü ile bakmak iyi bir yaklaşıklıkır. İkinci bir faydalı gözlem, $P(n)$ 'nin logaritmasının, $P(n)$ 'nin kendisinden çok daha yavaş değişen bir fonksiyon olmasıdır. Böylece, doğrudan doğruya $P(n)$ ile uğraşmak yerine, $\ln P(n)$ 'nin davranışını incelemek ve $\ln P(n)$ için n 'nin geniş bir bölgesinde geçerli olan iyi bir yaklaşıklık kurmak daha kolaydır. Böylece (5.1) ifadesinde logaritma alarak

$$\ln P(n) = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n \ln p + (N-n) \ln q \quad (5.2)$$

elde edilir. $P(n)$ 'yi maksimum yapan $n = \tilde{n}$ özel değeri $dP(n)/dn = 0$ koşuluyla veya buna eşdeğer olarak, $\ln P(n)$ 'nin maksimum olma koşulu ile belirlenir:

$$\frac{d \ln P(n)}{dn} = \frac{1}{P(n)} \frac{dP(n)}{dn} = 0 \quad (5.3)$$

(5.2) ifadesinin diferansiyelini almak için faktöriyel olarak bulunan bütün sayıların birden büyük olduklarına dikkat etmeliyiz. Bu nedenle, bunların her birine (M.7) yaklaşıklığını uygulayabiliriz (Bknz. Berkeley İstatistik Fizik Kitabı-Matematik Notları). Bu yaklaşıklığa göre $m \gg 1$ olmak üzere yeterince büyük bir m sayısı için,

$$\frac{d \ln m!}{dm} \approx \ln m \quad (5.4)$$

olur. Bunun için n 'ye göre (5.2) ifadesinin diferansiyelinden, iyi bir yaklaşıklık ile,

$$\frac{d \ln P(n)}{dn} = -\ln n + \ln(N-n) + \ln p - \ln q \quad (5.5)$$

elde edilir. $P(n)$ 'nin maksimumunu bulmak için (5.5) ifadesini (5.3) ifadesi gereğince sıfıra eşitleriz. Böylece

$$\ln \left[\frac{(N-n)}{n} \frac{p}{q} \right] = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{(N-n)}{n} \frac{p}{q} = 1$$

olur. Böylece $(N-n)p = nq$ veya $Np = n(p+q)$ bulunur. $p+q=1$ olduğu için, $P(n)$ 'nin maksimum olduğu $n = \tilde{n}$ değeri

$$\tilde{n} = Np \quad (5.6)$$

ile verilir.

$\ln P(n)$ 'nin maksimumu yakınındaki davranışını araştırmak için $\tilde{n}$ değeri yakınında Taylor serisine açmak gerekir. Buna göre;

$$\ln P(n) = \ln P(\tilde{n}) + \left[\frac{d \ln P(n)}{dn} \right] y + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 \ln P(n)}{dn^2} \right] y^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3 \ln P(n)}{dn^3} \right] y^3 + \dots \quad (5.7)$$

yazılabilir. Burada

$$y = n - \tilde{n} \quad (5.8)$$

dır ve köşeli parantezler, türevlerin $n = \tilde{n}$ 'da değerlendirileceklerini gösterir. İlk türev, (5.3) ifadesinin sağlandığı bir maksimum yakınında açılım yaptığımız için ortadan kalkar. Diğer türevler (5.5)'in ardı sıra diferansiyeli alınarak bulunabilir. Özel olarak,

$$\frac{d^2 \ln P(n)}{dn^2} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{N-n} = -\frac{N}{n(N-n)}$$

dir. Bu türevi $n = \tilde{n}$, $n = Np$ ve $N-n = N(1-p) = Nq$ için değerlendirmekle

$$\frac{d^2 \ln P(n)}{dn^2} = -\frac{1}{Npq}$$

bulunur. Böylece (5.7) ifadesi

$$\ln P(n) = \ln P(\tilde{n}) - \frac{y^2}{2Npq} + \dots$$

veya

$$P(n) = \tilde{P} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2Npq} \right\} = \tilde{P} \exp \left\{ -\frac{(n - \tilde{n})^2}{2Npq} \right\} \quad (5.9)$$

şeklini alır. Burada $\tilde{P} = P(\tilde{n})$ olarak alınmıştır.

(5.9) ifadesindeki $P(n)$ olasılığının, $y^2/Npq \gg 1$ veya $|y| \gg (Npq)^{1/2}$ olmak üzere, y çok büyük değerler aldığındaki $P(n)$ 'nin maksimum değeri yanında önemini yitirdiğine dikkat ediniz. Çünkü bu durumda üstel çarpan bir (1)'den çok küçüktür. Buna göre, $P(n)$ olasılığı ancak $|y| \lesssim (Npq)^{1/2}$ bölgesinde önemli olabilir. Ancak, genellikle y küçüktür ve (5.7) ifadesindeki y^3 'ü ve y 'nin daha büyük kuvvetlerini içine alan terimler, y^2 'li ilk terim yanında önemsizdir. Böylece (5.9) ifadesinin, gerçekten $P(n)$ olasılığı için, bu olasılığın önemli büyüklüğe sahip olduğu bütün bölgede iyi bir yaklaşıklık olduğu sonucu çıkarılabilir.

$\tilde{P}$ sabitinin değeri,

$$\sum_n P(n) = 1 \quad (5.10)$$

normalleştirme koşulunu kullanarak p ve q cinsinden doğrudan doğruya ifade edilebilir. Burada toplama, n 'nin mümkün olan bütün değerleri üzerindedir. $P(n)$, n 'nin ardışık tam değerleri arasında hafifçe değiştiği için bu toplama yerine bir integral alınabilir. Büyüklüğü (birden çok küçük) dn olan, n 'nin bir aralığı, $P(n)$ 'nin mümkün dn değerini içine alır. (5.10) ifadesi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(n) dn = \tilde{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(n - \tilde{n})^2}{2Npq}\right\} dn = \tilde{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2Npq}\right\} dy = 1 \quad (5.11)$$

şeklini alır. Burada integral alma aralığı $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a kadar genişletilerek bir basitleştirme yapılmıştır. $P(n)$, $|n - \tilde{n}|$ yeteri kadar büyük olduğunda, nasıl olsa önemsenmeyecek kadar küçük olduğundan bu iyi bir yaklaşıklıktır. (M.23) bağıntısını kullanarak (Bknz. Berkeley İstatistik Fizik Kitabı-Matematik Notları) (5.11)'deki integralden,

$$\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \quad (5.12)$$

bulunur. Bu sonucu ve (5.6) ifadesini kullanarak $P(n)$ olasılığı için (5.9) ifadesi

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left\{-\frac{(n - Np)^2}{2Npq}\right\} \quad (5.13)$$

şeklini alır. Bu ifadeyi değerlendirmenin, (5.1) ifadesine nazaran, daha kolay olduğuna dikkat ediniz. Çünkü bu ifade herhangi bir faktöriyelin hesaplanmasını gerektirmez.

(5.9) veya (5.13) ifadesinin sağ yanında verilen fonksiyon şeklindeki bir olasılık “Gauss Dağılımı” olarak bilinir. Bu dağılıma, yani bir logaritmanın bir kuvvet serisi açılımına götüren esas düşüncenin geniş uygulama alanı vardır. Bu nedenle, Gauss Dağılımı'nın, söz konusu sayıların büyük olduğu her zaman, istatistik düşüncelerde çok sık ortaya çıkmasına şaşmamalıdır.

$P(n)$ 'nin (5.13) ifadesi, n 'nin çeşitli ortalama değerlerinin hesaplanmasında kolayca kullanılabilir. Toplamaların hesaplanması, (5.10) normalleştirme koşulunun (5.11) ifadesinde kullanılan ile aynı biçimde eşdeğer integrallerin bir bir değerlendirilmesine indirgenebilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} \bar{n} &\equiv \sum_n P(n) \cdot n \\ &= (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(n - Np)^2}{2Npq}\right\} n dn = (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2Npq}\right\} (\tilde{n} + y) dy \\ &= \tilde{n} (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2Npq}\right\} dy + (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2Npq}\right\} y dy \end{aligned}$$

bulunur. Burada ilk integral (5.11) ifadesindekinin aynıdır ve değeri $(2\pi Npq)^{1/2}$ 'dir. İkinci integral simetri gereğince sıfırdır. Çünkü integrandı tektir (yani, $+y$ ve $-y$ için zıt işaretlidir) ve böylece $+y$ ve $-y$ yakınında integrale olan katkılar birbirlerini yok ederler. Buna göre, basitçe

$$\bar{n} = \tilde{n} = Np \quad (5.14)$$

bulunur. Bu, n 'nin ortalama değerinin Np 'ye eşit olduğunu gösterir. Bilindiği gibi $n = \tilde{n}$ 'da $P(n)$ olasılığı maksimum değerindedir.

Benzer şekilde n 'nin dağılması için

$$\begin{aligned}
\overline{(\Delta n)^2} &= \overline{(n - \tilde{n})^2} = \sum_n P(n)(n - Np)^2 \\
&= (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(n - Np)^2}{2Npq}\right\} (n - Np)^2 dn \\
&= (2\pi Npq)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2Npq}\right\} y^2 dy
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. (M.26) kullanılarak (Bknz. Berkeley İstatistik Fizik Kitabı-Matematik Notları),

$$\overline{(\Delta n)^2} = Npq \quad (5.15)$$

bulunur. Buna göre, n 'nin standart sapması

$$\widetilde{\Delta n} = \sqrt{Npq} \quad (5.16)$$

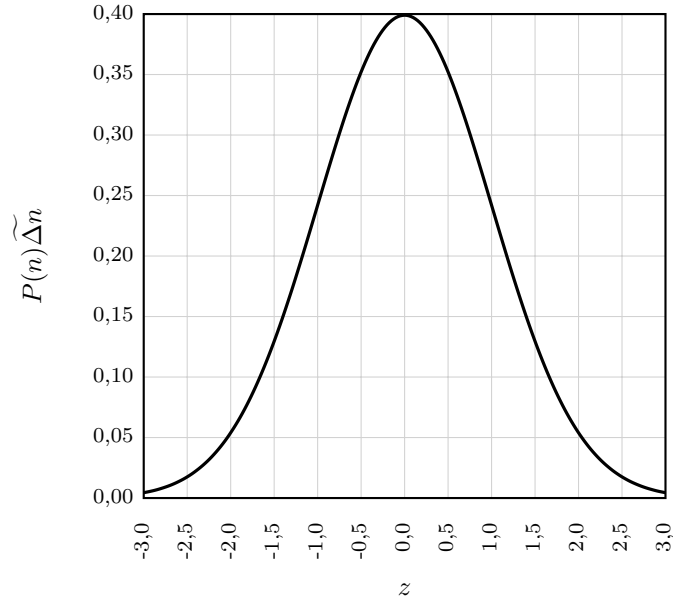
olur. Böylece (5.13) Gauss Dağılımı yalnız (5.14) ve (5.16) ifadelerinde yer alan, $\tilde{n}$ ve $\widetilde{\Delta n}$ cinsinden

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \widetilde{\Delta n}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{n - \tilde{n}}{\widetilde{\Delta n}}\right)^2\right\} \quad (5.17)$$

olarak ifade edilebilir. $n = \tilde{n} + (\widetilde{\Delta n})z$ olmak üzere $z \equiv (n - \tilde{n})/\widetilde{\Delta n}$ değişkeni ile (5.17) ifadesi daha kısa olarak,

$$P(n) \widetilde{\Delta n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z^2\right\} \quad (5.18)$$

şeklinde de verilebilir. Gauss dağılımının ortalama değerine göre simetrik olduğuna dikkat ediniz. Yani $P(n)$, $+z$ ve $-z$ için aynı değere sahiptir.



Şekil 5.1.

Şekil 5.1’de z parametresinin fonksiyonu olarak $P(n)\widetilde{\Delta n}$ ’in davranışı görülmektedir. Alan hesabı yapılırsa, ortalama değerin bir standart sapma altından, bir standart sapma üstüne kadar olan olasılık 0,683’tür.

$$W(\widetilde{\Delta n}) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} dz = 0,683$$

Yani, istatistik bir topluluğun %68,3’ü benzer davranış gösterir. Benzer şekilde ortalama değerin iki standart sapma altından, iki standart sapma üstüne kadar olan olasılık

$$W(2\widetilde{\Delta n}) = \int_{-2}^{+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} dz = 0,954$$

dür. Benzer olarak üç standart sapma için,

$$W(3\widetilde{\Delta n}) = \int_{-3}^{+3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} dz = 0,997$$

’dir.

Deneyin Yapılışı

Bir paranın $N = 400$ kez ya da $N = 400$ paranın bir kez atıldığını düşünelim. Bu deneyi $\mathcal{N} = 10000$ kez tekrarlayalım. Acaba N paradan n tanesinin yazı gelme olasılığı nedir?

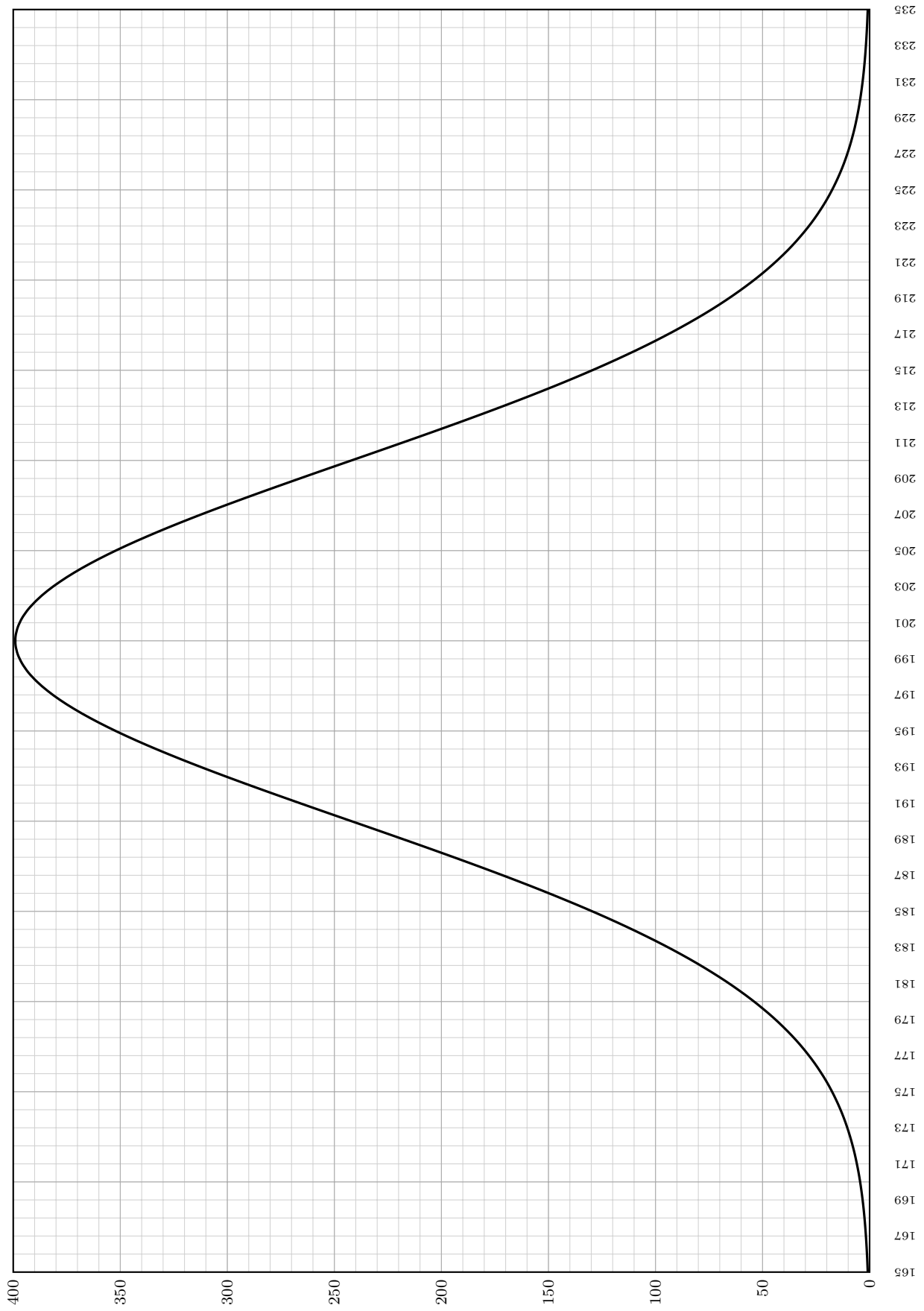
$N = 400$, $p = q = 1/2$ olduğu için (5.14) ifadesinden $\tilde{n}$ ortalama değerini ve (5.16) ifadesinden $\widetilde{\Delta n}$ standart sapmasını hesaplayınız. $n = \tilde{n} - 3,5\widetilde{\Delta n}$ değerinden $n = \tilde{n} + 3,5\widetilde{\Delta n}$ değerine kadar her n için $P(n)$ kuramsal olasılıklarını (5.17) ifadesinden, virgülden sonra beş hane yürüterek hesaplayınız. Kuramsal frekansları, $F(n) = \mathcal{N}P(n)$ ifadesinden, tamsayı olarak hesaplayınız. Kuramsal olasılıkları ve frekansları Çizelge 5.1’e işleyiniz.

Bilgisayar programı size deneysel frekansları verecektir. Deneysel olasılıkları, $P(n) = F(n)/\mathcal{N}$ ifadesinden virgülden sonra beş hane yürüterek, hesaplayınız. Deneysel frekansları ve olasılıkları Çizelge 5.1’e işleyiniz.

Çizelge 5.1. Değerlendirme çizelgesi.

n	KURAMSAL		DENEYSEL	
	$P(n)$	$F(n)$	$F(n)$	$P(n)$
165				
166				
167				
...				
...				
...				
234				
235				
TOPLAM				

Bu deneye χ^2 -testini uygulayınız. Şekil 5.2’de Gauss Dağılımı sürekli eğrisi, hazır olarak, size verilmektedir. Deneysel frekanslarınızı noktalar halinde aynı şekil üzerine yerleştiriniz. Nasıl bir uyum görüyorsunuz?



Şekil 5.2.

Bilgisayar Programı

Bu deneyde $N = 400$ paranın $\mathcal{N} = 10000$ kez atılması deneyini simüle etmek ve Çizelge 5.1'deki deneysel frekansları elde etmek için kullanılan özgün BASIC programının Python'a aktarılmış hâli aşağıda verilmiştir. Program, temelde Deney 2'deki "çoklu para atışları" simülasyonu ile aynı mantığı kullanır; farkı, özgün programdaki gibi **her bir denemenin sonucunu** (*j. deneme - n tane yazı*) **tek tek ekrana yazdırmasıdır**; tüm denemeler tamamlandığında ise sonuçları $n = 165$ 'ten $n = 235$ 'e kadar dört sütun hâlinde toplu bir çizelge olarak da raporlar. $\mathcal{N} = 10000$ gibi büyük bir deney sayısı için tek tek satırların sayısı da 10000 olacağından, bu çıktının bir dosyaya yönlendirilmesi (python program.py > cikti.txt) ya da `teker_teker=False` seçeneğiyle yalnızca toplu çizelgenin görüntülenmesi önerilir.

```
1 import random
2
3
4 def gauss_para_atislari(deney_sayisi, para_sayisi, teker_teker=True):
5     """N=para_sayisi tane paranin deney_sayisi kez atilmasini simule
6     eder. teker_teker=True ise (ozgun BASIC programindaki gibi) her
7     bir j. denemenin sonucu ('j - n') ekrana tek tek yazdirilir.
8
9     Donen deger: R[n] = n tane yazi gelen denemenin frekansi
10    """
11    R = [0] * (para_sayisi + 1)
12    sutun = 0
13    for j in range(1, deney_sayisi + 1):
14        yazi_sayisi = 0
15        for _ in range(para_sayisi):
16            if random.randint(0, 1) == 0:
17                yazi_sayisi += 1
18        R[yazi_sayisi] += 1
19
20        if teker_teker:
21            # ozgun programdaki 'PRINT TAB(13*U) J;"-";W' satirina
22            # karsilik gelir: sonuclar 6 sutun halinde yan yana yazilir
23            print(f"{j}-{yazi_sayisi}".ljust(13), end="")
24            sutun += 1
25            if sutun == 6:
26                print()
27                sutun = 0
28    if teker_teker and sutun != 0:
29        print()
30    return R
31
32
33 def sonuclari_yazdir(R, alt_sinir=165, ust_sinir=187, sutun_sayisi=4, adim=23):
34     """Ozgun programdaki gibi, n=alt_sinir..ust_sinir araligini
35     dort sutun halinde (her sutun 'adim' kadar kaydirilmis) yazdirir."""
36     print("\nKURAMSAL/DENEYSEL FREKANS OZETI")
37     for n in range(alt_sinir, ust_sinir + 1):
38         satir = []
39         for sutun in range(sutun_sayisi):
40             indeks = n + adim * sutun
41             if 0 <= indeks < len(R):
42                 satir.append(f"{indeks} - {R[indeks]}")
43         print(" ".join(f"{deger:<14}" for deger in satir))
44
45
```

```
46 if __name__ == "__main__":  
47     N_deney = int(input("DENEY SAYISI N = "))  
48     N_para = int(input("PARA ATIS SAYISI N = "))  
49     R = gauss_para_atislari(N_deney, N_para, teker_teker=True)  
50     sonuclari_yazdir(R)
```

Program 5.1. Gauss Dağılımı – Bilgisayar Yardımıyla Para Atışları.

Python dosyasını indir: [Google Drive'dan indir](#)

Deney No : 6

Deneyin Adı: Poisson Dağılımı (Bilgisayar Yardımıyla Poker Dizgesinden Maça Kızı Çekilmesi)

Kuramsal Bilgiler

Bundan önceki deneyde, daha önce Binom Dağılımı'nda kullanılan,

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (6.1)$$

ifadesine, $N \gg 1$ için $P(n)$ olasılığının önemli olduğu (yani, maksimum olduğu bölgeden çok uzağa götürülmediği) her yerde geçerli olan bir Gauss Dağılımı ile yaklaşılabileceği gösterildi. Şimdi bu ifadenin farklı bir bölgede geçerli bir yaklaşıklığını inceleyeceğiz. Bu yaklaşıklık, p olasılığı

$$p \ll 1 \quad (6.2)$$

olmak üzere yeteri kadar küçük olduğunda ve ilgi duyulan n sayısı

$$n \ll N \quad (6.3)$$

olmak üzere yeteri kadar küçük olduğunda anlam kazanır. Gauss Dağılımı'nın tartışılmasında düşünülen durumun tersine, buradaki n sayısı istenildiği kadar küçük olabilir. Şimdi (6.2) ve (6.3) ifadelerine göre olan yaklaşıklıkları ele alalım: $N!/(N-n)! = N(N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-n+1)$ olduğunu belirtelim. $n \ll N$ olduğundan sağdaki n tane çarpandan her biri temelde N 'ye eşittir. Böylece,

$$\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n \quad (6.4)$$

yaklaşık sonucu bulunur. Sonra $y \equiv (1-p)^{N-n}$ çarpanını veya eşdeğer olarak $\ln y = (N-n) \cdot \ln(1-p)$ logaritmasını göz önüne alırız. $n \ll N$ olduğundan, $N-n \approx N$ şeklinde dikkate alınabilir. Bundan başka $p \ll 1$ koşulu, logaritmayı bir Taylor serisinin ilk terimi ile yaklaşık olarak yazmamıza izin verir. Yani $\ln(1-p) \approx -p$ alabiliriz. Böylece $\ln y \approx -Np$ veya $y \approx e^{-Np}$ ve

$$(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np} \quad (6.5)$$

olur. (6.4) ve (6.5) yaklaşıklıklarını (6.1) ifadesinde kullanarak

$$P(n) = \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np}$$

veya

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (6.6)$$

buluruz. Burada

$$\lambda \equiv Np \quad (6.7)$$

dir. Bu λ tanımı ile (6.2) koşulu

$$\lambda \ll N \quad (6.8)$$

olmasına eşdeğerdir.

(6.6) ifadesine “Poisson Dağılımı” adı verilir. Paydadaki $n!$ çarpanının, n yeteri kadar büyük olduğunda, $P(n)$ ’nin çok çabuk azalmasına neden olacağına dikkat ediniz. Gerçekten $\lambda < 1$ olunca λ^n ’nin kendisi n ’nin azalan bir fonksiyonu olur ve böylece $P(n)$, n ’nin fonksiyonu olarak monoton bir biçimde azalır. $\lambda > 1$ olunca, λ^n , n ’nin artan bir fonksiyonu olur. Böylece $\lambda^n/n!$ çarpanı ve dolayısı ile $P(n)$ olasılığı, n ’nin daha büyük değerleri için azalmadan önce $n \approx \lambda$ yakınında bir maksimum gösterir. Herhangi bir durumda, $n \gg \lambda$ olunca, $P(n)$ olasılığı önemsenmeyecek kadar küçük olur. $P(n)$ önemsiz olmamak koşuluyla $n < \lambda$ olduğu bütün bölgede (6.8) ifadesi $n < \lambda \ll N$ olmasını içerir. Buna göre, Poisson Dağılımı’nın çıkarılmasında yararlanılan (6.3) ifadesi $P(n)$ olasılığının önemli büyüklükte olduğu her yerde doğrudan yerine gelmiş olur.

(6.7) ifadesinde tanımlanmış olan λ parametresi Berkeley İstatistik Fizik Kitabımızdaki (2.66) ifadesi gereğince n ’nin $\tilde{n}$ ortalama değerine eşit olur. Buna göre;

$$\lambda = \tilde{n} \quad (6.9)$$

dır. Öte yandan, λ veya $\tilde{n}$ ’nin verilen bir değeri için $p \ll 1$ olmasını öngören (6.8) veya (6.3) ifadesinin $N \rightarrow \infty$ ’a kadar gittikçe daha iyi sağlandığına dikkat ediniz. Böylece Poisson Dağılımı daima bu limitte uygulanabilir.

Deneyin Yapılışı

Dikkatimizi 32 oyun kağıdı bulunan bir poker dizgesinden maça kızı çekilen deneye verelim. “ N tane çekışten n tanesinde maça kızı gelme olasılığı nedir?” sorusu ile ilgileniyoruz. Bir çekışte maça kızı gelme olasılığı $p = 1/32$ ’dir. $N = 160$ çekışten n tanesinde ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) maça kızı gelme olasılığı, $p \ll 1$ olduğu için Poisson Dağılımı ile verilir. Deney $\mathcal{N} = 10000$ kez tekrarlanır.

Kuramsal çalışmanızda, önce (6.7) ifadesinden λ ’yı hesaplayınız, ardından (6.6) ifadesinden $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$ için kuramsal olasılıkları hesaplayınız. Sonuçlarımızı virgülden sonra altı hane yürütünüz*. Kuramsal frekanslarınızı $F(n) = \mathcal{N} \cdot P(n)$ ifadesinden, tamsayı olarak, hesaplayınız.

Deneyisel frekansları size bilgisayar programı verecektir. Deneyisel olasılıkları, virgülden sonra altı hane yürüterek, $P(n) = F(n)/\mathcal{N}$ ifadesinden hesaplayınız. Tüm hesaplarınızı Çizelge 6.1’e işleyiniz.

Deneye χ^2 -testini uygulayınız. Kuramsal ve deneyisel frekansları birlikte bir çubuk diyagramında gösteriniz. Sonuçlarınızı yorumlayınız.

***Dikkat:** Önce $P(0)$ ’ı hesaplayınız. $P(n+1) = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda}$ ve $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\lambda}{n+1}$ olduğundan, diğer olasılıkları $P(1) = P(0) \cdot \lambda$; $P(2) = P(1) \cdot \lambda/2$; $\dots$ şeklinde hesaplayınız.

Çizelge 6.1. Poisson Dağılımı deneyi değerlendirme çizelgesi.

n	KURAMSAL		DENEYSEL	
	$P(n)$	$F(n)$	$F(n)$	$P(n)$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
TOPLAM				

Bilgisayar Programı

Poker dizgesinden maça kızı çekilişini simüle etmek için kullanılan özgün BASIC programının Python'a aktarılmış hâli aşağıda verilmiştir. Program, 32 kağıtlık bir dizgeden N çekişin N kez tekrarlanmasını simüle eder; özgün programdaki gibi **her bir tekrarın sonucunu** (j . deneme – maça kızının kaç kez geldiği) **tek tek ekrana yazdırdıktan sonra**, tüm tekrarlar tamamlandığında deneysel frekans ve olasılık dağılımının toplu çizelgesini verir.

```
1 import random
2
3
4 def poisson_poker(deney_sayisi, cekis_sayisi, kagit_sayisi=32, hedef_kagit=22,
5                 teker_teker=True):
6     """Bir poker dizgesinden 'cekis_sayisi' kez cekim yapilan bir
7     deneyin 'deney_sayisi' kez tekrarlanmasini simule eder.
8     teker_teker=True ise (ozgun BASIC programindaki 'PRINT J;"-";S,'
9     satirina karsilik gelecek sekilde) her j. denemenin sonucu
10    ('j-S') ekrana tek tek yazdirilir.
11
12    kagit_sayisi : dizgedeki toplam kagit sayisi (32)
13    hedef_kagit : aranan kagida (maca kizi) karsilik gelen rasgele
14    indeks (ozgun programda 22)
15
16    Donen deger: R[n] = hedef kagidin n kez geldigi tekrar sayisi
17    """
18    R = [0] * 31
19    for j in range(1, deney_sayisi + 1):
20        gelme_sayisi = 0
21        for _ in range(cekis_sayisi):
22            cekilen = random.randint(1, kagit_sayisi)
23            if cekilen == hedef_kagit:
24                gelme_sayisi += 1
25        R[gelme_sayisi] += 1
26
27        if teker_teker:
28            print(f"{j}-{gelme_sayisi}", end="\t")
29            if j % 8 == 0:
30                print()
31    if teker_teker and deney_sayisi % 8 != 0:
32        print()
33    return R
34
35
36 def sonuclari_yazdir(deney_sayisi, R):
37     print("\n----- POISSON DAGILIMI -----")
38     print("DENEYSEL FREKANS VE OLASILIKLAR\n")
39     print(f"{'n':>3} {'F(n)':>8} {'P(n)':>8}")
40     print(f"{'':>3} {'-----':>8} {'-----':>8}")
41     for n in range(21):
42         print(f"{n:>3} {R[n]:>8} {R[n] / deney_sayisi:>8.4f}")
43
44
45 if __name__ == "__main__":
46     N_deney = int(input("DENEY SAYISI N = "))
47     N_cekis = int(input("CEKIS SAYISI N = "))
48     R = poisson_poker(N_deney, N_cekis)
49     sonuclari_yazdir(N_deney, R)
```

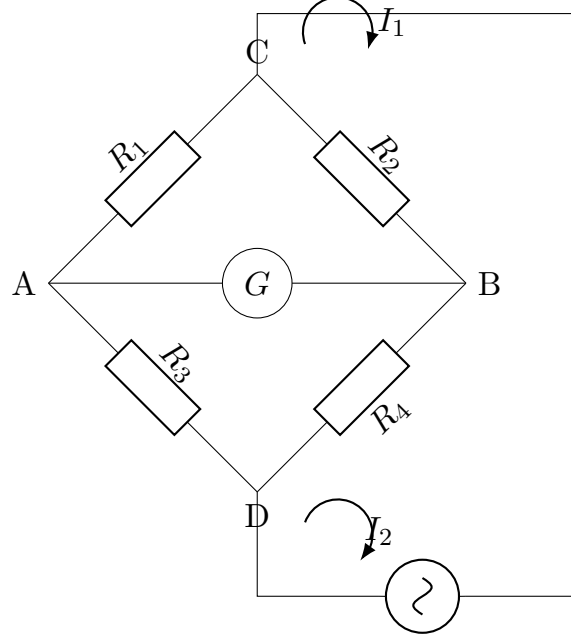
Program 6.1. Poisson Dağılımı – Poker Dizgesinden Maça Kızı Çekilmesi.

Python dosyasını indir: [Google Drive'dan indir](#)

Deney No : 7

Deneyin Adı: Otomatik Sıcaklık Kontrolü

Kuramsal Bilgiler

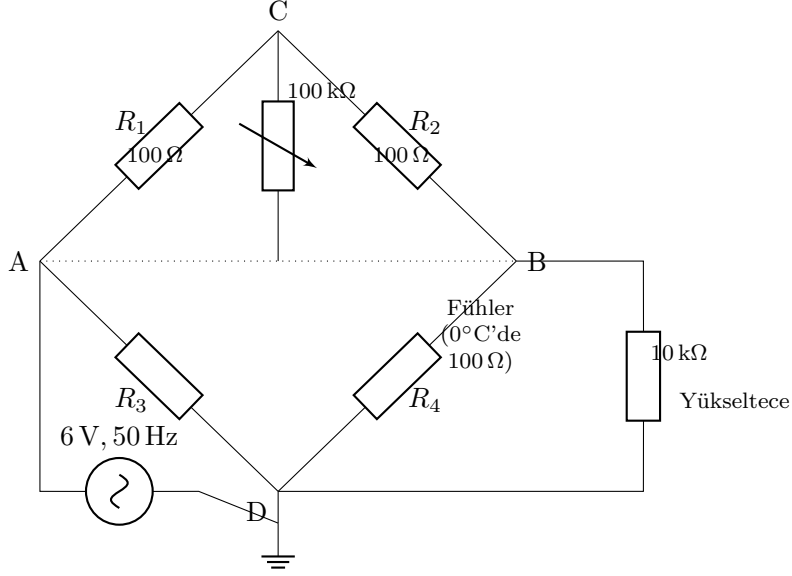


Şekil 7.1. Wheatstone Köprüsü.

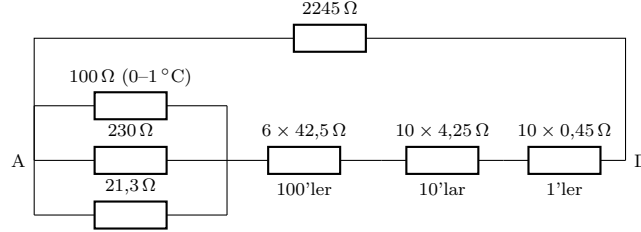
Şekil 7.1'deki Wheatstone Köprüsünde galvanometreden geçen akım sıfırlandığında R_1 ve R_2 dirençleri üzerindeki akım I_1 akımına, R_3 ve R_4 dirençleri üzerindeki akım ise I_2 akımına eşit olur. C ve D noktaları arasında gerilim düşmesi olmadığından, $I_1 R_1 = I_2 R_3$ ve $I_1 R_2 = I_2 R_4$ eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerden,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (7.1)$$

denge koşulu ortaya çıkar. Yani, bu denge koşulu varsa C ile D noktaları arasındaki potansiyel fark sıfır olur. $R_1 = R_2$ sağlandığında, $R_3 = R_4$ olmalıdır. Eğer R_4 , değeri sıcaklıkla değişen bir direnç ise ve R_3 , R_4 'ün belli bir t sıcaklığında olması gereken değere ayarlanırsa, R_4 o değeri alıncaya kadar, R_4 'ün bulunduğu ortamın sıcaklığı değişir.



R_3 'ün iç yapısı (metindeki hesaplamada kullanılan değerlerle):



Şekil 7.2. Köprü devresi.

Wheatstone Köprüsü çalışma ilkesinden yararlanarak Şekil 7.2'deki devre kurulabilir. 100 kΩ değişken direnç, R_1 ve R_2 dirençlerini eşitlemek içindir. Sıcaklığı kontrol edilecek sistemle doğrudan temas halinde bulunan Fühler (R_4) vardır. Fühler, Platin (Pt) spiralli seramik gövde içerisindedir, -200 ile $+750$ °C arasında çalışır ve 0 °C'de 100 Ω'luk bir dirence sahiptir.

Sıcaklığı kontrol altında tutulmak istenen bir sistemin 100 °C olması isteniyorsa, bu devrede aşağıdaki işlemler yapılmalıdır. Öncelikle Fühler'in 100 °C'de kaç Ω dirence sahip olduğu belirlenmelidir. Bilindiği gibi, metallerin direnci sıcaklıkla doğru orantılıdır ve bağıllık,

$$R_4 = R_{40}(1 + \alpha t) \quad (7.2)$$

ifadesi ile verilir. Burada, R_{40} , Fühler'in $t = 0$ °C'deki direncidir ($R_{40} = 100$ Ω), α ise "direncin sıcaklıkla artım katsayısı" veya "sıcaklık katsayısı" adını alır ve Platin için $\alpha = 3,82 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 'dir. Buradan $t = 100$ °C için $R_4 = 138,2$ Ω bulunur.

Eğer sistem 100 °C'de tutulmak isteniyorsa, $R_4 = 138,2$ Ω olmalı ve R_3 'te bu değere getirilmelidir. Paralel bağlı dirençler için $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, seri bağlı dirençler için de $R = R_1 + R_2$ tanım bağıntılarının kullanılmasıyla $\frac{230 \cdot 21,3}{230 + 21,3} = 19,5$ Ω olduğu için, R_3

$$R_3 = \frac{2245 \cdot (3 \cdot 42,5 + 19,5)}{2245 + 3 \cdot 42,5 + 19,5} = \frac{2245 \cdot 147}{2392} = 138 \text{ } \Omega$$

değerine getirilir. Eğer Fühler 100 °C'de değilse $R_3 \neq R_4$ olacağından C ve D noktaları arasında köprüye uygulanan gerilimle aynı ya da zıt fazda bir potansiyel fark oluşur. Bu

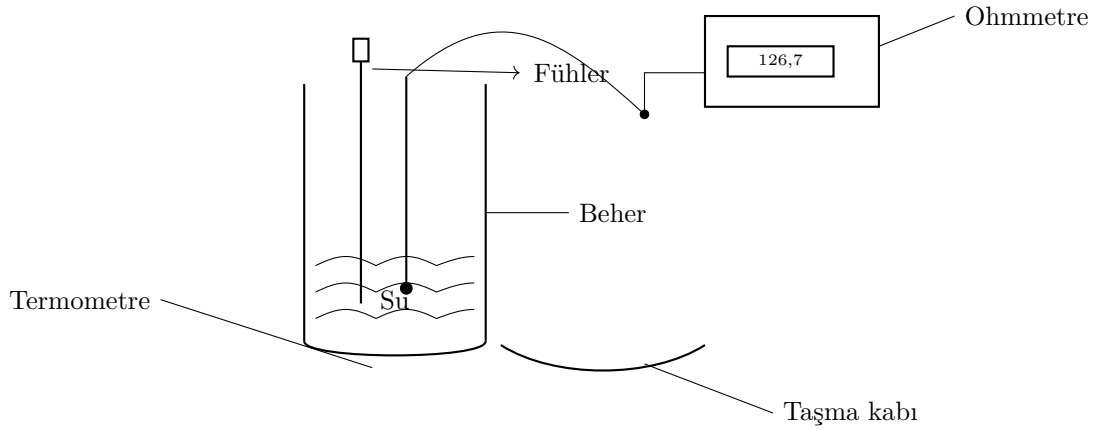
potansiyel fark yükseltilecek, dirençler aracılığı ile sistem ısıtılabilir. Sistem 100°C sıcaklığa ulaştığında $R_3 = R_4$ olacağından, şimdi C ve D noktaları arasındaki potansiyel fark sıfır olur ve sistemin ısınma süreci durur ve sistem istenilen sıcaklığa ayarlanmış olur.

Anlaşılabileceği üzere burada bir metalin elektriksel direnci, sıcaklık parametresi olarak kullanılmaktadır. Bu bağlamda, bu çalışmada Platin için direncin sıcaklıkla artım katsayısı (α), tayin edilecektir.

Deneyin Yapılışı

Deneyde, Fühler'in direnci sıcaklığa bağlı olarak ölçülecektir. Bir beher dolusu su kaynatırız. Suyun sıcaklığı bir termometre ile, Fühler'in direnci bir sayısal ohmmetre ile ölçülecektir (Şekil 7.3). Okuma sırasında, Fühler'in termometreye yakın olmasını sağlayınız. Su yavaş yavaş soğurken, her 2°C 'de bir ohmmetreden direnç değerini okuyarak Çizelge 7.1'e işleyiniz.

Soğuma hızı yavaşladığında suyun içine küçük buz parçası atarak yeni sıcaklık değerlerine ulaşabilirsiniz. Deney süresince suyu bir karıştırma çubuğu ile çok yavaş bir şekilde karıştırınız. Beherden taşan su, taşma kabında toplanır.



Şekil 7.3. Deney düzeneği.

Çizelge 7.1. Sıcaklığa karşılık Fühler'in direnci.

$t (^{\circ}\text{C})$	$R_4 (\Omega)$	$t (^{\circ}\text{C})$	$R_4 (\Omega)$	$t (^{\circ}\text{C})$	$R_4 (\Omega)$	$t (^{\circ}\text{C})$	$R_4 (\Omega)$	$t (^{\circ}\text{C})$	$R_4 (\Omega)$
100		78		56		34		12	
98		76		54		32		10	
96		74		52		30		8	
94		72		50		28		6	
92		70		48		26		4	
90		68		46		24		2	
88		66		44		22		0	
86		64		42		20			
84		62		40		18			
82		60		38		16			
80		58		36		14			

$0-100^{\circ}\text{C}$ arasındaki sıcaklıklar apsiste, $100-140\Omega$ arasındaki direnç değerleri ordinatta olmak üzere milimetrik kağıdınıza bir grafik çiziniz. Nasıl bir ilişki görüyorsunuz?

(7.2) ifadesini $R_4 = R_{40} + R_{40}\alpha t$ şeklinde yazarak, $t = 0^{\circ}\text{C}$ için $R_4 = R_{40}$ değerini grafikten bulunuz. Doğrunun eğiminden yararlanarak, platin için direncin sıcaklıkla artım katsayısı α 'yı tayin ediniz. Sonucunuzu yorumlayınız.

Fühler, termometre olarak kullanıldığında, deneyde kullandığımız cıvalı termometreye göre; ne gibi avantajlara sahiptir? Tartışınız.

Deney No : 8

Deneyin Adı: Paramanyetizma

Kuramsal Bilgiler

Birim hacminde N_o tane manyetik atomu olan ve bir $\vec{B}$ dış manyetik alanına konulan bir maddenin manyetik özelliklerini inceleyelim. Her manyetik atomun $1/2$ spininin ve $\vec{\mu}$ manyetik momentinin olduğu basit durumu göz önüne alalım. Kuantum mekaniksel anlatımla, her atomun manyetik momentini ya “yukarı” (yani dış alan ile aynı yönlü paralel) ya da “aşağı” (yani dış alan ile zıt yönlü paralel) yönelebilir. Manyetik özellikleri manyetik momentlerinin birbirine göre yönelmesine bağlı olan maddeye “paramanyetik madde” denir.

Maddenin bir T mutlak sıcaklığında olduğunu düşünelim ve atomlardan birinin manyetik momentinin $\vec{B}$ dış manyetik alanı doğrultusundaki $\bar{\mu}$ ortalama bileşenini bulmaya çalışalım: Her bir manyetik atomun, maddenin diğer bütün atomları ile çok zayıf bir şekilde etkileştiğini varsayalım. Özellikle, bir manyetik atomun bulunduğu yerde komşu manyetik atom veya atomların oluşturduğu manyetik alanın etkisini göz ardı edecek şekilde, atomları birbirinden yeterince uzakta kabul ediyoruz. Böylelikle, dikkatimizi tek bir manyetik atom üzerinde toplayarak onu gözlem altındaki küçük bir sistem olarak ele alabiliriz ve maddenin bütün diğer atomlarına ilgilendiğimiz T mutlak sıcaklığında bir ısı haznesi olarak bakabiliriz.

Her atom mümkün iki durumda bulunabilir. Manyetik momentin yukarı olduğu (+) durumu ve manyetik momentin aşağı olduğu (–) durumu. Bu durumları sırasıyla inceleyelim.

(+) durumunda, atomik manyetik moment $+\mu_o$ değerinde, alan ile aynı yönlü paralel bir izdüşüm verecek şekilde presesyon yapar. Atomun buna karşılık gelen manyetik enerjisi $E_r = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ ifadesinden

$$E_+ = -\mu_o B \quad (8.1)$$

olur.

$$P_r = C \exp(-\beta E_r) \quad (8.2)$$

Kanonik dağılımı, atomu bu durumda bulmanın P_+ olasılığı için,

$$P_+ = C \exp(-\beta E_+) = C \exp(\beta \mu_o B) \quad (8.3)$$

sonucunu verir. Burada, C bir orantı katsayısıdır ve $\beta = (kT)^{-1}$ ’dir. Bu daha düşük enerjili bir durumdur ve dolayısıyla atomun daha büyük olasılıkla bulunduğu durumdur.

(–) durumda, atomik manyetik moment $-\mu_o$ değerinde, alan ile zıt yönlü paralel bir izdüşüm verecek şekilde presesyon yapar. Atomun buna karşılık gelen manyetik enerjisi

$$E_- = +\mu_o B \quad (8.4)$$

olur. Atomun bu durumda bulunmasının P_- olasılığı

$$P_- = C \exp(-\beta E_-) = C \exp(-\beta \mu_o B) \quad (8.5)$$

dir. C sabiti, atomu bu durumların ikisinden birisinde bulma olasılığının bir normalizasyon koşulu ile belirlenir. Böylece, $P_+ + P_- = 1$ ifadesinden

$$C = \frac{1}{\exp(\beta \mu_o B) + \exp(-\beta \mu_o B)} \quad (8.6)$$

Atom, (+) durumda daha büyük olasılıkla bulunduğu için, $\bar{\mu}$ ortalama manyetik momentini dış alan yönünde olmalıdır. (8.3) ve (8.5) ifadeleri uyarınca yönelmeyi karakterize eden önemli parametre, $\mu_o B$ manyetik enerjisinin kT sıcaklık enerjisine oranını ölçen w niceliğidir:

$$w = \beta \mu_o B = \frac{\mu_o B}{kT} \quad (8.7)$$

T çok büyükse, yani $w \ll 1$ ise, (+) durumda bulunma olasılığı ile (-) durumda bulunma olasılığının hemen hemen aynı olacağı açıktır. Bu durumda manyetik moment $\bar{\mu} \approx 0$ olacak şekilde hemen hemen tamamen rasgele yönelmiştir. Öte yandan, T çok küçükse, $w \gg 1$ dir ve (+) durumun olasılığı (-) durumunkinden daha büyüktür.

Bütün bu nitel sonuçlar, $\bar{\mu}$ ortalama değerini gerçekten hesaplayarak kolayca nicel hale getirilebilir. Böylece,

$$\bar{\mu} = P_+(\mu_o) + P_-(-\mu_o) = \mu_o \frac{\exp(\beta \mu_o B) - \exp(-\beta \mu_o B)}{\exp(\beta \mu_o B) + \exp(-\beta \mu_o B)} = \mu_o \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} \quad (8.8)$$

bulunur. (8.8) ifadesi kısaca

$$\bar{\mu} = \mu_o \tanh\left(\frac{\mu_o B}{kT}\right) = \mu_o \tanh(w) \quad (8.9)$$

şeklinde yazılabilir.

Maddenin birim hacmindeki ortalama manyetik moment, yani mıknatıslanması, manyetik alan yönündedir. Eğer birim hacminde N_o tane manyetik moment varsa, mıknatıslanmanın $\bar{M}_o$ büyüklüğü, $\bar{M}_o = N_o \bar{\mu}$ ile verilir. Böylece,

$$\bar{M}_o = N_o \mu_o \tanh(w) \quad (8.10)$$

yazılabilir.

$\bar{\mu}$ 'nın daha önce nitel olarak tartışılan davranışta bulunduğunu kolayca sağlayabiliriz; $w \ll 1$ ise $\exp(w) = 1 + w + \dots$ ve $\exp(-w) = 1 - w + \dots$ açılımı ile, $\tanh(w) = \frac{(1+w+\dots)-(1-w+\dots)}{(1+w+\dots)+(1-w+\dots)} = w$ olur. $w \gg 1$ ise, $e^{-w} \ll e^w$ olduğundan, $\tanh(w) = 1$ olur. (8.9) ifadesi aşağıdaki sınır davranışını öngörür;

$$\mu_o B \ll kT \quad (w \ll 1) \text{ için } \bar{\mu} = \mu_o \left(\frac{\mu_o B}{kT} \right) = \frac{\mu_o^2 B}{kT} \quad (8.11)$$

$$\mu_o B \gg kT \quad (w \gg 1) \text{ için } \bar{\mu} = \mu_o \quad (8.12)$$

dır.

$\mu_o B \ll kT$ olduğu zaman, $\bar{\mu}$ değeri oldukça küçüktür. (8.11) ve (8.12) ifadelerinden anlaşılacağı üzere $\bar{\mu}$ değeri, doruk μ_o değerinden $\mu_o B/kT$ oranında küçüktür. Bu sınırdaki, basit olarak, $\bar{\mu}$ 'nın B dış manyetik alanı ile doğru, T mutlak sıcaklığı ile ters orantılı olduğu söylenebilir. Buna göre; mıknatıslanma,

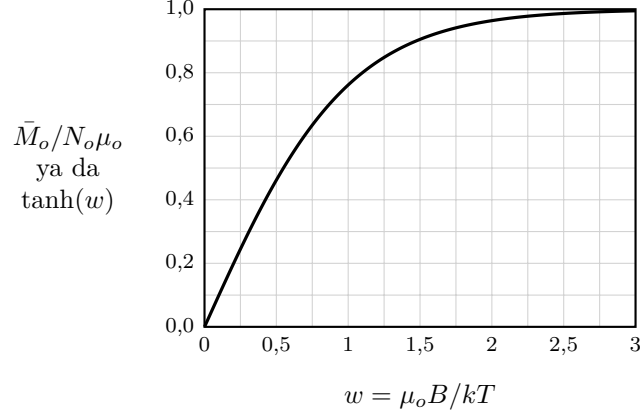
$$\bar{M}_o = N_o \bar{\mu} = \frac{N_o \mu_o^2 B}{kT} \equiv \chi B \quad (8.13)$$

halini alır. Burada χ , dış manyetik alandan bağımsız bir orantı katsayısıdır ve bu parametreye "maddenin manyetik alınganlığı" denir. (8.13) ifadesi χ için mikroskopik nicelikler cinsinden aşağıdaki açık ifadeyi sağlar.

$$\chi = \frac{N_o \mu_o^2}{kT} \quad (8.14)$$

χ 'nin mutlak sıcaklıkla ters orantılı olması olgusuna "Curie Yasası" adı verilir.

$\mu_o B \gg kT$ olduğu zaman, $\bar{\mu}$ olanaklı doruk değerini alır. Buna karşılık mıknatıslanma, olanaklı doruk doyuma değeri olan $\bar{M}_o = N_o \mu_o$ değerini alır ve bu nedenle B veya T 'den bağımsızdır. $\bar{M}_o$ mıknatıslanmasının, T mutlak sıcaklığına ve B dış manyetik alana bağlı (8.10)'a göre davranışı Şekil 8.1'de gösterilmiştir.



Şekil 8.1. Mıknatıslanmanın, mutlak sıcaklığa ve dış manyetik alana bağlı davranışı.

Deneyin Yapılışı

Bu çalışmada $B = 0,3$ T'lık dış manyetik alanda su (H_2O) için, χ manyetik alınganlığı, sıcaklığa bağlı olarak incelenecektir.

$-20^\circ C$ ile $+90^\circ C$ arasında kalan sıcaklıklar için $10^\circ C$ 'lik aralıklarla kT değerlerini hesaplayınız. H_2O 'daki protonlar (hidrojen atomunun çekirdeği) için spin $1/2$ olup, $\mu_o = 1,416 \cdot 10^{-26}$ J/T'dir. Oksijen çekirdeğinin spini olmadığından, çalışmanıza herhangi bir katkısı olmaz. Hesapladığımız kT değerlerini $\mu_o B$ değeri ile karşılaştırmız. (8.13) ifadesini bu sıcaklık bölgesinde kullanabilir miyiz? Yanıtınız “evet” ise (8.14) ifadesinden yararlanarak, $10^\circ C$ aralıklarla χ değerlerini hesaplayınız. N_o 'ın birim hacimdeki manyetik moment sayısı (yani hidrojen sayısı) olduğunu unutmayınız. Buzun yoğunluğunu $900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ alınız. $0^\circ C$ buz ve $0^\circ C$ su için ayrı ayrı hesap yapınız. Çizelge 8.1'i oluşturunuz.

Milimetrik kağıdınıza $\chi = f(10^3/T)$ grafiğini çizin ve yorumunuzu yapınız.

Çizelge 8.1. Çalışma verileri çizelgesi.

Durum	$T (^\circ C)$	$T (K)$	$10^3/T (K^{-1})$	$kT (J)$	$\mu_o B (J)$	$\chi (J \cdot T^{-2} \cdot m^{-3})$
B U Z	-20					
	-10					
	0					
S U	0					
	10					
	20					
	30					
	40					
	50					
	60					
	70					
	80					
	90					

Deney No : 9

Deneyin Adı: İdeal Gazların Durum Denklemi

Kuramsal Bilgiler

Bir gazın basıncı, sıcaklığı ve hacmi değiştirilerek o gazın durum değişiklikleri arasındaki ilişki belirlenebilir.

Kapalı bir kaptaki bir miktar hava için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

1) Sabit sıcaklıkta, basıncın fonksiyonu olarak hacmin değişimi (İzotermik Değişim, Boyle Yasası ya da Mariotte Yasası)

2) Sabit basınçta, sıcaklığın bir fonksiyonu olarak hacmin değişimi (İzobarik Değişim, Gay-Lussac Yasası)

3) Sabit hacimde, sıcaklığın bir fonksiyonu olarak basıncın değişimi (İzokor Değişim, Amon-ton's Yasası)

4) Genişleme katsayısı, basınç katsayısı ve sıkışabilirlik katsayısı.

Bir maddenin genel durum denklemi $\bar{p}$ basıncı, T mutlak sıcaklığı (K) ve V hacmi arasındaki bir ilişki ile ifade edilir:

$$f(\bar{p}, T, V) = 0 \quad (9.1)$$

Bu üç durum değişkeni, bir ideal gaz durumunda aşağıdaki gibidir:

$$\bar{p}V = \nu RT \quad (9.2)$$

Burada ν gazın mol sayısıdır ve R ideal gaz sabitidir.

Genişleme katsayısı α , basınç katsayısı β ve sıkışabilirlik katsayısı κ aşağıdaki eşitliklerde tanımlanmıştır:

$$\alpha = \frac{1}{V_o} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{\bar{p}} \quad (9.3)$$

$$\beta = \frac{1}{\bar{p}_o} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial T} \right)_V \quad (9.4)$$

$$\kappa = -\frac{1}{V_o} \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{p}} \right)_T \quad (9.5)$$

Burada indisler $(\bar{p}, V, T)$, bu değişkenlerin değişmezliğini ifade eder ve $\bar{p}_o$ ve V_o belli çalışma değerleri ile ilişkilidirler (Örneğin suyun donma noktası ve atmosfer basıncı).

(9.1) ifadesinden

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{\bar{p}} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{p}} \right)_T d\bar{p} \quad (9.6)$$

yazılabilir. Eğer V hacmi sabit ise ($dV = 0$), (9.6) ifadesinden,

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial T} \right)_V = -\frac{(\partial V / \partial T)_{\bar{p}}}{(\partial V / \partial \bar{p})_T} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

olur ve κ , α ve β cinsinden ifade edilebilir.

$$\kappa = \frac{\alpha}{\bar{p}_o \beta} \quad (9.7)$$

ve α ve β aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

$$V = V_o(1 + \alpha\theta) \quad (\bar{p} = \text{Sabit}) , \quad \alpha = \frac{V - V_o}{V_o\theta} \quad (9.8)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_o(1 + \beta\theta) \quad (V = \text{Sabit}) , \quad \beta = \frac{\bar{p} - \bar{p}_o}{\bar{p}_o\theta} \quad (9.9)$$

Burada θ , °C olarak ölçülür.

Deneyin Yapılışı

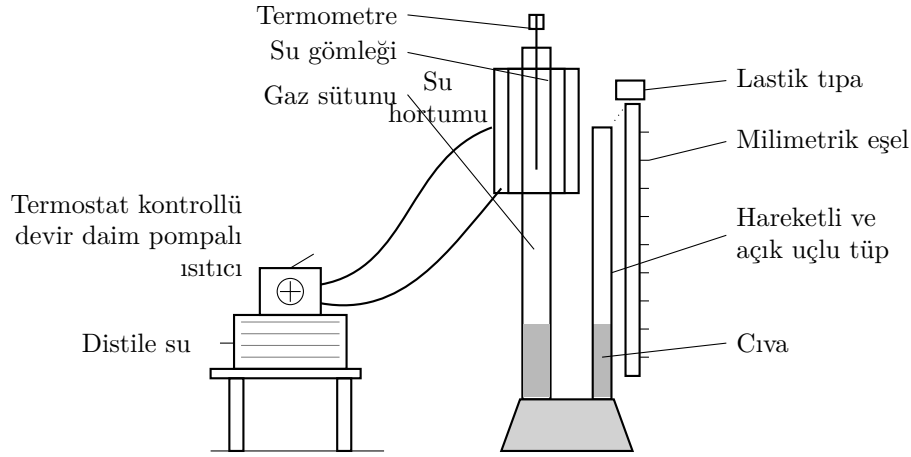
Deneyisel kurgu Şekil 9.1’de gösterildiği gibidir. Termostat kontrollü dolaşan sıvı için distile veya deiyonize su kullanılması tavsiye edilir. Gazın V hacmi, milimetrik eşel üzerinden okunan gaz sütununun boyu ℓ ile doğru orantılıdır ve tüpün kesit alanı $A = 1,02 \text{ cm}^2$ olduğundan, $V = \ell \cdot 1,02$ ifadesiyle hesaplanabilir.

Sıkışan havanın $\bar{p}$ basıncı, dış hava basıncı $\bar{p}_a$ ile $\Delta\bar{p}$ cıva seviyeleri arasındaki yükseklik farkından ibarettir;

$$\bar{p} = \bar{p}_a + \Delta\bar{p}. \quad (9.10)$$

Dış atmosferik basınç ($\bar{p}_a$) bir barometre yardımıyla ölçülür.

Cıva sütununun bulunduğu tüpe zincirle bağlı olan lastik tıpa, alet kullanımda değil iken kapatılır. Ölçümler yapılırken tıpa çıkarılmalıdır, aksi taktirde bir başka dış basınç oluşur.



Şekil 9.1. Deney Düzenegi.

A) $T = \text{Sabit durumu (İzotermik)}$:

Bu çalışmada T (K) sıcaklığı size verilecek olan değerde sabit tutulacaktır.

1) Sizden istenen değeri sağlamak için ısıtıcınızın termostatını ayarlayınız ve cam tüpe bağlı termometreyi deney boyunca izleyiniz.

2) Barometreniz yardımıyla, $\bar{p}_a$ basıncını, mmHg olarak, tayin ediniz ve hPa olarak ifade ediniz ($1 \text{ mmHg} = 1,333 \text{ hPa}$).

3) İlk olarak, ℓ mesafesini 28 cm’ye ayarlayınız ve her iki taraftaki cıva seviyeleri arasındaki farkı ($\Delta\bar{p}$), mmHg olarak, tayin ediniz.

4) ℓ mesafesini her seferinde 1 cm azaltarak, $\Delta\bar{p}$ basınç farkı değerlerini tayin ediniz ve Çizelge 9.1’i doldurunuz.

5) Gazın $\bar{p}$ basıncı ile V hacmi arasındaki ilişkiyi tayin etmek için, milimetrik kağıda bir $\log \bar{p} = f(\log V)$ grafiği çiziniz. Çizdiğiniz grafik lineer bir azalma gösterir ve $Y = AX^B$ yani, $\log Y = \log A + B \log X$ tipindedir. Grafiğinizin eğimini alırsanız size B ’yi verecektir. B ’yi tayin ediniz.

6) Mol hesabı da yaparak, sonuçlarınızı yorumlayınız.

Çizelge 9.1. $T = \text{Sabit durumu için çalışma verileri}$.

V = Sabit = _____ cm ³		$\bar{p}_a = \dots\dots\dots$ mmHg	
		$\Delta\bar{p} = 500$ mmHg	
		$\bar{p} = \text{Sabit} = \text{_____}$ mmHg = _____ hPa	
θ (°C)	$\Delta\bar{p}$ (mmHg)	ℓ (cm)	$V = \ell \cdot 1,02$ (cm ³)
$\Delta\bar{p}$ (hPa)	$\bar{p}$ (hPa)		

Deney No : 10

Deneyin Adı: Brown Molekül Hareketi (İki Boyutlu Kutuda N Molekülün Devinimi İçin Simülasyon)

Kuramsal Bilgiler

N moleküllü ideal bir sistemimiz olsun. Moleküller eşit kütleli (M), eşit yarıçaplı (r) katı kürecikler gibi davransınlar. Birbirleriyle ve içinde bulundukları kabın çeperleriyle tam esnek çarpışma yapsınlar. Hızları, rasgele olmakla birlikte, Maxwell Hız Dağılımını sağlasın. Sistemin başlangıçtaki toplam kinetik enerjisi deney boyunca korunacaktır.

$$\sum E_k = \frac{1}{2}M \sum_{i=1}^N v_i^2 = Sbt \quad (10.1)$$

Bu simülasyon iki boyutlu uzayda r yarıçaplı dairelerle yapılabilir. Moleküller ekrana, birbirleriyle çakışmayacak şekilde yerleştirilir ve her birine rasgele hız bileşenleri verilir. Bilgisayar programında molekül sayısı 48 seçilebilir. Maxwell Hız Dağılımına göre, 13 enerji bölgesinde 48 molekülün hızlarının dağılımı Çizelge 10.1'de verilmiştir (Berkeley İstatistik Fizik Kitabı Şekil 6.7 ve bu deneyin Ek-10.1 kısmı).

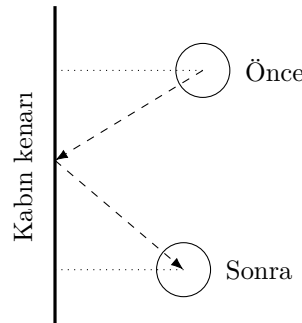
Çizelge 10.1. 48 molekülün hız dağılımı.

Enerji Bölgesi	Bölgedeki Molekül Sayısı	Bağlı Hız (birim)	Enerji Bölgesi	Bölgedeki Molekül Sayısı	Bağlı Hız (birim)
1	1	0,93	8	6	7,86
2	3	2,46	9	5	8,97
3	4	3,51	10	3	10,05
4	4	4,32	11	3	11,37
5	5	5,07	12	1	12,75
6	6	5,91	13	1	14,82
7	6	6,84			

Programda molekül sayısı 48, yarıçap 8 ya da 9, adım sayısı 300 seçilir. Program her adımda her bir molekülü izler. Böylece birinci adımdan itibaren iki olay beklenir:

I) Moleküllerin merkezleri arasındaki uzaklık D olmak üzere $D \leq 2r$ olduğunda iki molekülün çarpıştığı varsayılır. Program, üçlü ya da daha çoklu çarpışmaların bulunmadığı varsayımı ile hazırlanmıştır. Çarpışmaların fiziksel temelleri bu deneyin Ek-10.2 kısmında ayrıntılı olarak verilmiştir.

II) Molekülün merkezi kabın kenarına yarıçapı ile o yöndeki hız bileşeninin mutlak değerinin toplamından daha yakın ya da bu toplama eşit olacak kadar yaklaşmışsa; kabın kenarı ile esnek çarpışma yaptığı kabul edilir ve o kenara dik olan hız bileşeni terslenir, diğer hız bileşeni değişmez (Şekil 10.1).



Şekil 10.1 Molekölün kabın kenarı ile esnek çarpışması.

Denge Durumuna Yaklaşım

Bu programda, başlangıçta 48 molekül kabın sol yarısına yerleştirilir. Çalıştırıldığında, program her 10 adımda bir kabın sol yarısındaki molekül sayısı n 'yi verecektir. Berkeley İstatistik Fizik Kitabındaki Şekil 1.19'un alt sağ yarısına benzer şekilde $n = f(j)$ 'yi, kesikli çizgilerle, milimetrik kağıda çiziniz ve yorumlayınız.

Bir Molekülün Brown Hareketi

Bu programda, 300 adım süresince sistem ekranda izlenir. Her bir molekülün bu süreçteki yörüngesini ve çarpışma yaptığı noktanın koordinatları ile bu çarpışmanın kaçınıcı adımda gerçekleştiğini program size gösterecektir. Her bir molekülün koordinatları sizlere ayrı ayrı bilgisayar çıktısı olarak verilecektir. Verilecek eşellemeye uygun olarak, milimetrik kağıda, Berkeley İstatistik Fizik Kitabındaki Şekil 1.25'e benzer bir çizim yapınız. Cetvel kullanarak iki çarpışma arasında kat edilen mesafeleri mm olarak ölçünüz ve Çizelge 10.2'ye uygun olarak bölgelendiriniz ve her bölgenin frekansını kendi molekülünüz için belirleyiniz. Tüm 48 molekül için toplu frekansları elde etmek üzere Çizelge 10.2'yi oluşturunuz.

Çizelge 10.2. Deney verileri.

Bölge	ℓ (mm)	Molekül No ve Frekansı														Toplam Frekans $F(\ell)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..	..	48		
1	0–10															
2	11–20															
3	21–30															
4	31–40															
.	..															
.	..															
.	..															
12	171–180															

Bölgelere göre toplam frekansları gösteren bir çubuk diyagramı çiziniz. Ardından, her bir bölgenin ortasına denk gelen, ℓ değerlerine karşılık toplam frekans noktalarını gösteren bir grafik çiziniz. Uygun bir bilgisayar programıyla bu noktaların davranışına uyan üstel bir fonksiyon elde ediniz. Bu fonksiyon $F(\ell) = F(\ell)_{\text{maks}} \exp(-\ell/\ell_{\text{ort}})$ formatındadır. Bu ifadeden ve grafiğinizden yararlanarak ortalama serbest yol tayini yapınız ve sonucunuzu yorumlayınız.

Ek-10.1

Maxwell Hız Dağılımı

Deneyde moleküllerin hızları Maxwell Hız Dağılımına uygun olmalıdır.

$$F(v) dv = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv \quad (\text{E10.1.1})$$

En olası hız $\tilde{v}$ cinsinden (E10.1.1) ifadesini $v/\tilde{v}$ 'nın fonksiyonu olarak yeniden yazmak hesapları kolaylaştırır. En olası hız

$$\tilde{v} = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \quad (\text{E10.1.2})$$

olup $\frac{m}{2kT} = \frac{1}{\tilde{v}^2}$ olarak (E10.1.1) ifadesi

$$F(v) dv = 4\pi n \frac{1}{\tilde{v}^3} \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp \left[-(v/\tilde{v})^2 \right] v^2 dv \quad (\text{E10.1.3})$$

ya da

$$F(v) dv = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-(v/\tilde{v})^2 \right] \left(\frac{v}{\tilde{v}} \right)^2 \frac{dv}{\tilde{v}} \quad (\text{E10.1.4})$$

olarak elde edilir. $x = \frac{v}{\tilde{v}}$, $dx = \frac{dv}{\tilde{v}}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{F(v)}{n} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) x^2 dx \quad (\text{E10.1.5})$$

ifadesi bulunur. Bu ifadenin her iki yanının integrali alınır,

$$\int_0^\infty \frac{F(v)}{n} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-x^2) x^2 dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 1 \quad (\text{E10.1.6})$$

normalizasyon (tamlık) koşulunu sağladığı açıkça görülür.

Çizelge E10.1.1'de, integralin üst sınırı $x_i = v/\tilde{v}$ 'nın çeşitli değerleri için, 48 molekülün hız dağılımı verilmiştir.

Çizelge E10.1.1. Maxwell Hız Dağılımına göre, moleküllerin 13 ayrı enerji bölgesine dağılımı.

(1) $x_i = (v/\tilde{v})_i$	(2) İnt×48	(3) Toplam Molekül sayısı	(4) Aralığa düşen mol. Sayısı	(5) Bağıl hız	(6) 6×bağıl hız	(7) (6) ²	(8) Prog. Sayaç No: <i>i</i>
0,31	1,0165	1	1	0,155	0,93	0,8649	1
0,51	4,1094	4	3	0,410	2,46	6,0516	2
0,66	8,0497	8	4	0,585	3,51	12,3201	3
0,78	12,0539	12	4	0,720	4,32	18,6624	4
0,91	16,9652	17	5	0,845	5,07	25,7049	5
1,06	22,9190	23	6	0,985	5,91	34,9281	6
1,22	29,0419	29	6	1,140	6,84	46,7856	7
1,40	35,0434	35	6	1,310	7,86	61,7799	8
1,59	39,9655	40	5	1,495	8,97	80,4609	9
1,76	43,0985	43	3	1,675	10,05	101,0025	10
2,03	46,0385	46	3	1,895	11,37	129,2769	11
2,22	47,0691	47	1	2,125	12,75	162,5625	12
2,72	47,9252	48	1	2,470	14,82	219,6324	13

48 molekül 13 enerji alt grubuna yerleştirilmiştir. İntegralin üst sınırı öyle alınmıştır ki 2. kolondaki İntx48 değerleri tam sayılara yakın (%1 sapma) çıksın. Buna göre; 0- x_i aralığına düşen molekül sayıları 3. kolona; x_i - x_{i+1} aralığına düşen molekül sayıları 4. kolona; $(x_i + x_{i+1})/2$, yani aralığın tam ortasına karşılık gelen bağıl hızlar 5. kolona; en az bir (1) piksel uzunluğunda olması gereken bağıl hızlar için 5. kolondaki bağıl hızlar 6 rakamı ile çarpılarak 6. kolona; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ olduğu için,

$$\frac{v}{\tilde{v}} = \sqrt{\left(\frac{v_x}{\tilde{v}}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\tilde{v}}\right)^2}$$

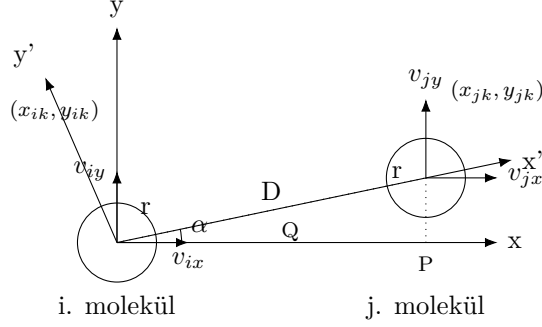
ifadesinde, bilgisayar programında rasgele ön işaret ve rasgele $W(I) = \frac{v_x}{\tilde{v}}$ seçilerek $\frac{v_y}{\tilde{v}} = \sqrt{\left(\frac{v}{\tilde{v}}\right)^2 - \left(\frac{v_x}{\tilde{v}}\right)^2}$ ifadesinden $Z(I) = \frac{v_y}{\tilde{v}}$ hesaplandığı için 6. kolondaki değerlerin kareleri 7. kolona yazılmıştır. Programda, 8. kolonda gösterilen 13 ayrı sayıçta, 4. kolondaki değerleri aşmayacak şekilde, ilgili enerji aralığına yerleştirilen molekül sayıları depolanır.

Sistemin toplam enerjisi $\alpha \sum v^2 \equiv \alpha \sum (v/\tilde{v})^2 \equiv \alpha \sum [(v_x/\tilde{v})^2 + (v_y/\tilde{v})^2]$ olup programda $EN = \sum [W(I) * W(I) + Z(I) * Z(I)]$ olarak alınmaktadır.

Ek-10.2

Aşağıda, eşit kütleli, küresel varsayılan, eşit yarıçaplı moleküllerin iki boyutlu uzayda esnek çarpışmalarının fiziksel temelleri verilmektedir.

1) Üssüz x,y sisteminde L-çerçevesinde : Çarpışmadan önce moleküllerin yerleri ve hız bileşenleri şöyledir;



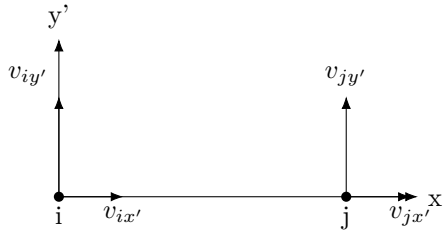
Şekil E10.2.1. L-üssüz çerçevede, k. adımda, moleküllerin yerleri ve hız bileşenleri.

Fiziksel	Programda	
x_{ik}	X(I,B)	
y_{ik}	Y(I,B)	
x_{jk}	X(J,B)	B. adımda i. ve j. moleküllerin koordinatları.
y_{jk}	Y(J,B)	

Fiziksel	Programda	
v_{ix}	W(I)	
v_{iy}	Z(I)	Her çarpışmada değişse bile i. ve j. moleküllerin
v_{jx}	W(J)	hızlarına programda aynı isimler verilebilir.
v_{jy}	Z(J)	

$P = X(J, B) - X(I, B)$ ve $Q = Y(J, B) - Y(I, B)$ ise iki molekülün merkezleri arasındaki uzaklık, $D = \sqrt{P^2 + Q^2}$ dir. Programda; $D = \text{SQR}(P*P + Q*Q)$ dur. $D \leq 2r$ için çarpışma vardır ve bu durumda olan molekül çiftleri için 2. adıma geçiyoruz.

2) Üslü sistemde L-çerçevesinde : Koordinatları z eksenini etrafında α açısı kadar döndürelim. Öyle ki x' eksen i. ve j. moleküllerin merkezlerinden geçsin.



Şekil E10.2.2. Üslü sistemde L-çerçevesinde moleküllerin yerleri ve hız bileşenleri.

Burada hız bileşenlerinin dönüşümü şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} v_{ix'} \\ v_{iy'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_{jx'} \\ v_{jy'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{jx} \\ v_{jy} \end{bmatrix}$$

Yeni hız bileşenleri programda R ve S ile gösterilirse;

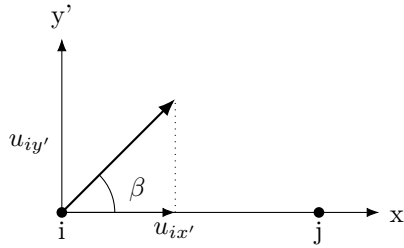
Fiziksel	Programda	
$v_{ix'}$	R(I)	i. molekül için
$v_{iy'}$	S(I)	
$v_{jx'}$	R(J)	j. molekül için
$v_{jy'}$	S(J)	

$E = P/D = \cos \alpha$ ve $F = Q/D = \sin \alpha$ olmak üzere hız bileşenlerinin dönüşümü programda,

$$\begin{aligned} R(I) &= E*W(I) + F*Z(I) & R(J) &= E*W(J) + F*Z(J) \\ S(I) &= E*Z(I) - F*W(I) & S(J) &= E*Z(J) - F*W(J) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile gerçekleştirilir.

3) Üslü sistemde L-çerçevesinde : β çarpma açısını hesaplamak için i. molekülün j. moleküle göre bağıl hız bileşenleri.

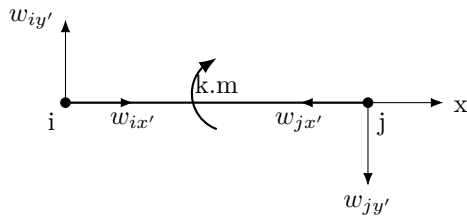


Şekil E10.2.3. Üslü sistemde L-çerçevesinde bağıl hız ve β çarpma açısı.

Fiziksel	Programda
$u_{ix'} = v_{ix'} - v_{jx'}$	$U(I) = R(I) - R(J)$
$u_{iy'} = v_{iy'} - v_{jy'}$	$V(I) = S(I) - S(J)$
$u_{ix'} = 0$ ise $ \beta = \pi/2$	$U(I) = 0$ ise $\beta = \pi/2$
$\beta = \arctg(u_{iy'}/u_{ix'})$	$\beta = \text{ABS}(\text{ATN}(V(I) / U(I)))$
$\text{tg}\beta = u_{iy'}/u_{ix'}$	$\text{TN}\beta = V(I) / U(I)$

4) Kütle merkezi referans çerçevesinde : Kütle merkezinin L-çerçevesindeki hızı şöyledir:

$$\vec{V}_{km} = \frac{1}{2}(v_{ix'} + v_{jx'})\hat{x} + \frac{1}{2}(v_{iy'} + v_{jy'})\hat{y}$$



Şekil E10.2.4. Kütle merkezi referans çerçevesinde çarpışmadan önceki hız bileşenleri.

Şimdi hız bileşenleri; $\vec{w}_i = \vec{v}_{i(\text{üslü})} - \vec{V}_{km}$ vektörel eşitliğinden kolayca hesaplanabilir.

Fiziksel

$$\begin{aligned} w_{ix'} &= v_{ix'} - \frac{1}{2}(v_{ix'} + v_{jx'}) = \frac{1}{2}(v_{ix'} - v_{jx'}) = \frac{1}{2}u_{ix'} \\ w_{iy'} &= v_{iy'} - \frac{1}{2}(v_{iy'} + v_{jy'}) = \frac{1}{2}(v_{iy'} - v_{jy'}) = \frac{1}{2}u_{iy'} \\ w_{jx'} &= v_{jx'} - \frac{1}{2}(v_{ix'} + v_{jx'}) = \frac{1}{2}(v_{jx'} - v_{ix'}) = -\frac{1}{2}u_{ix'} \\ w_{jy'} &= v_{jy'} - \frac{1}{2}(v_{iy'} + v_{jy'}) = \frac{1}{2}(v_{jy'} - v_{iy'}) = -\frac{1}{2}u_{iy'} \end{aligned}$$

Programda

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}U(I) \\ &\frac{1}{2}V(I) \\ &-\frac{1}{2}U(I) \\ &-\frac{1}{2}V(I) \end{aligned}$$

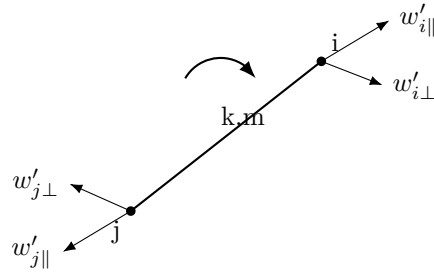
5) Çarpışmadan sonra kütle merkezi referans çerçevesinde :

Fiziksel

$$\begin{aligned} w'_{i\parallel} &= w_{ix'} \\ w'_{i\perp} &= w_{iy'} \\ w'_{j\parallel} &= w_{jx'} \\ w'_{j\perp} &= w_{jy'} \end{aligned}$$

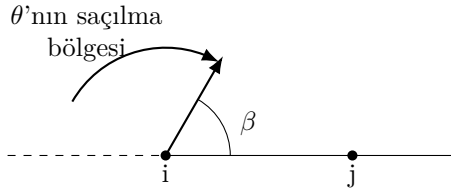
Programda

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}U(I) \\ &\frac{1}{2}V(I) \\ &\frac{1}{2}U(I) \\ &\frac{1}{2}V(I) \end{aligned}$$

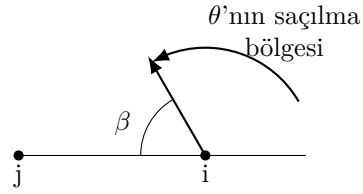


Şekil E10.2.5. k.m referans çerçevesinde çarpışmadan sonra.

6) Kütle merkezi referans çerçevesinde çarpışmadan sonra saçılma açısı θ 'nın belirlenmesi:



(a) i. molekül solda, $U(I) > 0$



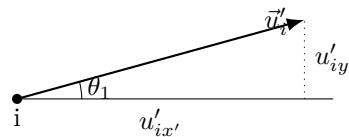
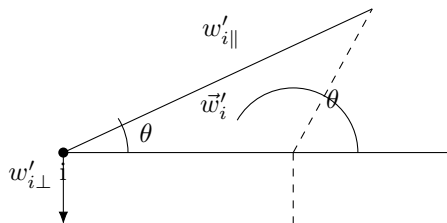
(b) i. molekül sağda, $U(I) < 0$

Şekil E10.2.6. Saçılma bölgeleri (temsili iki durum; ara açı işaretlerine göre dört alt durum metindeki I-V listesinde verilmiştir).

$|\beta| \leq \theta \leq \pi + |\beta|$ (genel sınır); ayrıca $\text{tg}\beta > 0$ için $\beta \leq \theta \leq \pi + |\beta|$, $\text{tg}\beta < 0$ için $\pi - |\beta| \leq \theta \leq 2\pi - |\beta|$ olur; (b) durumunda $\theta = \theta + \pi$ eklenir.

-
- I-) $U(I) = 0$ ise $\text{beta} = \text{PI}/2$
 - II-) Genelde $\text{beta} = \text{ABS}(\text{ATN}(V(I) / U(I)))$
 - III-) $U(I) > 0, V(I) > 0$ ise $\text{teta} = \text{RND} * \text{PI} + \text{beta}$
 - IV-) $U(I) > 0, V(I) < 0$ ise $\text{teta} = \text{RND} * \text{PI} - \text{beta} + \text{PI}$
 - V-) $U(I) < 0$ ise III ve IV'te hesaplanan teta'lara PI eklenir: $\text{teta} = \text{teta} + \text{PI}$
-

7) Yeniden L-çerçevesine geçelim:



Şekil E10.2.7. Kütle merkezinden üslü L-çerçevesine geçiş.

$\vec{u}'_i = \vec{w}'_i + \vec{V}_{km}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} (a) \quad u'_{ix'} &= w'_{i\parallel} \cos \theta + w'_{i\perp} \sin \theta + \frac{1}{2}(v_{ix'} + v_{jx'}) \\ (b) \quad u'_{iy'} &= w'_{i\parallel} \sin \theta - w'_{i\perp} \cos \theta + \frac{1}{2}(v_{iy'} + v_{jy'}) \\ (c) \quad u'_{jx'} &= -w'_{i\parallel} \cos \theta - w'_{i\perp} \sin \theta + \frac{1}{2}(v_{ix'} + v_{jx'}) \\ (d) \quad u'_{jy'} &= -w'_{i\parallel} \sin \theta + w'_{i\perp} \cos \theta + \frac{1}{2}(v_{iy'} + v_{jy'}) \end{aligned}$$

Programda bu dönüşüm şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} RT &= (R(I) + R(J)) / 2 \\ ST &= (S(I) + S(J)) / 2 \\ RI &= (+U(I)*\cos(\text{teta}) + V(I)*\sin(\text{teta})) / 2 \\ SI &= (-V(I)*\cos(\text{teta}) + U(I)*\sin(\text{teta})) / 2 \\ (a') \quad R(I) &= RT + RI \\ (b') \quad S(I) &= ST + SI \\ (c') \quad R(J) &= RT - RI \\ (d') \quad S(J) &= ST - SI \end{aligned}$$

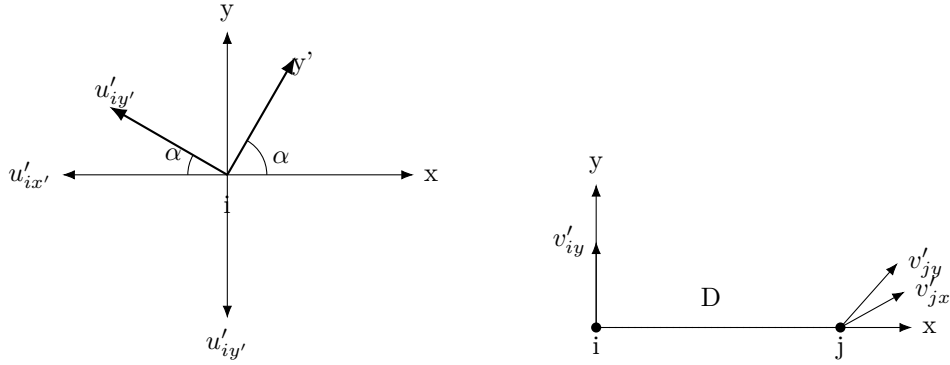
8) Ters dönüşüm ile üslü'den üssüz sisteme geçilir:

Üssüz sistemde çarpışmadan sonra hızlar için aşağıdaki ifadeler kullanılır.

$$\begin{bmatrix} v'_{ix} \\ v'_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{ix'} \\ u'_{iy'} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v'_{jx} \\ v'_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{jx'} \\ u'_{jy'} \end{bmatrix}$$

Bunların program karşılıkları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} W(I) &= E*R(I) - F*S(I) & W(J) &= E*R(J) - F*S(J) \\ Z(I) &= E*S(I) + F*R(I) & Z(J) &= E*S(J) + F*R(J) \end{aligned}$$



Şekil E10.2.8. (a) Ters dönüşüm. (b) L-çerçevesinde çarpışmadan sonra hız bileşenleri.

Böylece çarpışma yapmış iki molekülün bir sonraki adımdaki hız bileşenleri bulunmuş olur. Çarpışmaya girmemiş olan moleküller bir önceki adımdaki hızlarını korurlar.

Bilgisayar Programları

Özgün kılavuzdaki BASIC programları, iki ayrı çalışma için ("Denge Durumuna Yaklaşım" ve "Bir Molekülün Brown Hareketi") neredeyse aynı alt yordamları (molekül yerleştirme, Maxwell hız ataması, duvar çarpışması, iki molekül çarpışması – bkz. Ek-10.2) birbirinden bağımsız olarak tekrar etmektedir. Python sürümünde bu ortak fizik önce tek bir modül hâlinde yazılmış (Program 10.1), ardından her iki çalışma bu modülü kullanan kısa birer program olarak verilmiştir (Program 10.2 ve 10.3).

```
1 import math
2 import random
3
4 GENISLIK_TAM = 638 # tam kutu genisligi (piksel)
5 GENISLIK_YARIM = 318 # sadece sol yari (Denge Durumuna Yaklasim icin)
6 YUKSEKLIK = 349
7 V_PAY = 9 # baslangicta hiz icin birakilan kenar payi
8
9 # Cizelge 10.1: 48 molekulun 13 enerji bolgesine dagilimi
10 # (molekul sayisi, bagil hiz)
11 CIZELGE_10_1 = [
12     (1, 0.93), (3, 2.46), (4, 3.51), (4, 4.32), (5, 5.07),
13     (6, 5.91), (6, 6.84), (6, 7.86), (5, 8.97), (3, 10.05),
14     (3, 11.37), (1, 12.75), (1, 14.82),
15 ]
16
17
18 def maxwell_hiz_bileseni(bagil_hiz):
19     """Buyuklugu tam olarak 'bagil_hiz' olan, yonu rasgele bir
20     (vx, vy) hiz vektoru uredir (ozgun programdaki W(I), Z(I)
21     atamasiyla aynidir: once rasgele isaretli bir vx genligi
22     secilir, sonra vy buyuklugu Pisagor bagintisinden tamamlanir)."""
23     vx = random.choice((-1, 1)) * random.random() * bagil_hiz
24     vy_buyukluk = math.sqrt(max(bagil_hiz**2 - vx**2, 0.0))
25     vy = random.choice((-1, 1)) * vy_buyukluk
26     return vx, vy
27
28
29 def baslangic_hizlari(N=48):
30     """Cizelge 10.1'e gore N molekule Maxwell hiz dagilimina uygun
31     (vx, vy) ciftleri atar."""
32     hizlar = []
33     for molekul_sayisi, bagil_hiz in CIZELGE_10_1:
34         for _ in range(molekul_sayisi):
35             hizlar.append(maxwell_hiz_bileseni(bagil_hiz))
36     assert len(hizlar) == N
37     random.shuffle(hizlar)
38     vx = [h[0] for h in hizlar]
39     vy = [h[1] for h in hizlar]
40     return vx, vy
41
42
43 def molekulleri_yerlestir(N, r, sol_yariya_sinirla=False):
44     """N molekulunu, birbirleriyle cakismayacak sekilde kutu icine
45     rasgele yerlestirir. sol_yariya_sinirla=True ise (Denge
46     Durumuna Yaklasim programinda oldugu gibi) tum molekuller
47     kutunun sol yarisina yerlestirilir."""
48     genislik = GENISLIK_YARIM if sol_yariya_sinirla else GENISLIK_TAM
```

```

49 x, y = [], []
50 for i in range(N):
51     while True:
52         xi = random.uniform(r + V_PAY + 2, genislik - r - V_PAY - 2)
53         yi = random.uniform(r + V_PAY + 2, YUKSEKLIK - r - V_PAY - 2)
54         if all(math.hypot(xi - x[k], yi - y[k]) > 2 * r + V_PAY / 2
55                 for k in range(i)):
56             x.append(xi)
57             y.append(yi)
58             break
59     return x, y
60
61
62 def duvar_carpismalari(x, y, vx, vy, r, genislik=GENISLIK_TAM):
63     """Kabin kenarina, yaricapi ile o yondeki hiz bileseninin mutlak
64     degeri toplami kadar yaklasmis molekullerin ilgili hiz
65     bilesenini terslenir (Sekil 10.1). Bu adimda bir duvardan
66     sekmis molekullerin indekslerini kume olarak dondurur."""
67     sekenler = set()
68     for i in range(len(x)):
69         if x[i] <= r - vx[i] or x[i] >= genislik - r - vx[i]:
70             vx[i] = -vx[i]
71             sekenler.add(i)
72         if y[i] <= r - vy[i] or y[i] >= YUKSEKLIK - r - vy[i]:
73             vy[i] = -vy[i]
74             sekenler.add(i)
75     return sekenler
76
77
78 def esnek_carpisma(vx, vy, i, j, x, y):
79     """Merkezleri arasindaki uzaklik D <= 2r olan i. ve j.
80     molekullerin, Ek-10.2'de turetilen esnek carpisma
81     donusumlerine gore yeni hizlarini hesaplar."""
82     P, Q = x[j] - x[i], y[j] - y[i]
83     D = math.hypot(P, Q)
84     if D == 0:
85         D = 1e-10
86     E, F = P / D, Q / D
87
88     # 2) uslu sisteme donusum
89     Ri = E * vx[i] + F * vy[i]
90     Si = E * vy[i] - F * vx[i]
91     Rj = E * vx[j] + F * vy[j]
92     Sj = E * vy[j] - F * vx[j]
93
94     # 3) bagil hiz ve beta carpma acisi
95     U, V = Ri - Rj, Si - Sj
96     beta = math.pi / 2 if U == 0 else abs(math.atan(V / U))
97
98     # 6) sacilma acisi teta (kutle merkezi cercevesinde, rasgele)
99     if V >= 0:
100         teta = random.random() * math.pi + beta
101     else:
102         teta = random.random() * math.pi - beta + math.pi
103     if U < 0:
104         teta += math.pi
105

```

```

106 # 7) yeniden L-cercevesine (uslu) gecis
107 RT, ST = (Ri + Rj) / 2, (Si + Sj) / 2
108 RI = (U * math.cos(teta) + V * math.sin(teta)) / 2
109 SI = (-V * math.cos(teta) + U * math.sin(teta)) / 2
110 Ri, Si = RT + RI, ST + SI
111 Rj, Sj = RT - RI, ST - SI
112
113 # 8) ters donusumle ussuz sisteme donus
114 vx[i] = E * Ri - F * Si
115 vy[i] = E * Si + F * Ri
116 vx[j] = E * Rj - F * Sj
117 vy[j] = E * Sj + F * Rj
118
119
120 def cakismayi_gider(x, y, i, j, r):
121     """Carpisma sonrası merkezler hala D <= 2r kadar yakinsa,
122     moleculleri P,Q doğrultusunda birer birim ayırarak cakismayi
123     giderir (ozgun programdaki 1090-1150 satirlarina karsilik gelir)."""
124     while True:
125         P, Q = x[j] - x[i], y[j] - y[i]
126         D = math.hypot(P, Q)
127         if D > 2 * r or D == 0:
128             return
129         x[i] += -1 if x[i] <= x[j] else 1
130         x[j] += 1 if x[i] <= x[j] else -1
131         y[i] += -1 if y[i] <= y[j] else 1
132         y[j] += 1 if y[i] <= y[j] else -1
133
134
135 def bir_adim_ilerlet(x, y, vx, vy, r, genislik=GENISLIK_TAM):
136     """Sistemi bir zaman adimi ilerletir: once pozisyonlar
137     guncellenir, sonra ikili carpismalar ve duvar carpismalari
138     uygulanir. Bu adimda carpisan (i, j) ciftlerinin listesini ve
139     bir duvardan sekmis molekullerin kumesini dondurur."""
140     N = len(x)
141     for i in range(N):
142         x[i] += vx[i]
143         y[i] += vy[i]
144
145     carpanlar = []
146     for i in range(N - 1):
147         for j in range(i + 1, N):
148             if math.hypot(x[j] - x[i], y[j] - y[i]) <= 2 * r:
149                 esnek_carpisma(vx, vy, i, j, x, y)
150                 cakismayi_gider(x, y, i, j, r)
151                 carpanlar.append((i, j))
152
153     sekenler = duvar_carpismalari(x, y, vx, vy, r, genislik)
154     return carpanlar, sekenler

```

Program 10.1. Brown Molekül Hareketi – Ortak Simülasyon Fonksiyonları.

Python dosyasını indir: Klasörden indir (10.1, 10.2, 10.3 aynı klasörde birlikte)

“Denge Durumuna Yaklaşım” çalışmasında, 48 molekül başlangıçta kabın sol yarısına yerleştirilir ve her 10 adımda bir sol yarıdaki molekül sayısı n kaydedilir. Özgün programdaki

gibi, aynı satırda sağ yarıdaki molekül sayısı n' ve toplam kinetik enerji (EN, korunumunu doğrulamak amacıyla) da yazdırılır.

```

1 from brown_ortak import (
2     GENISLIK_TAM, baslangic_hizlari, molekulleri_yerlestir,
3     bir_adim_ilerlet,
4 )
5
6
7 def denge_durumuna_yaklasim(N=48, adim_sayisi=300, r=8):
8     """48 molekulü kabin sol yarisina yerlestirir, sistemi
9     adim_sayisi kadar ilerletir ve her 10 adimda bir kabin sol
10    yarisindaki (n) ve sag yarisindaki (n') molekul sayilarini ile
11    toplam kinetik enerjiyi (EN) j'nin bir fonksiyonu olarak
12    kaydeder (ozgun programdaki 900-920 satirlarina karsilik
13    gelir)."""
14    x, y = molekulleri_yerlestir(N, r, sol_yariya_sinirla=True)
15    vx, vy = baslangic_hizlari(N)
16
17    j_degerleri, n_degerleri = [], []
18    for adim in range(1, adim_sayisi + 1):
19        bir_adim_ilerlet(x, y, vx, vy, r, genislik=GENISLIK_TAM) # donen degerler
20        burada kullanilmiyor
21        if adim % 10 == 0:
22            n_sol = sum(1 for xi in x if xi <= GENISLIK_TAM / 2)
23            n_sag = N - n_sol
24            EN = sum(vx[i]**2 + vy[i]**2 for i in range(N))
25            j_degerleri.append(adim)
26            n_degerleri.append(n_sol)
27            print(f"adim={adim:4d} n={n_sol} n'={n_sag} EN={EN:.1f}")
28        return j_degerleri, n_degerleri
29
30 if __name__ == "__main__":
31     denge_durumuna_yaklasim()

```

Program 10.2. Brown Molekül Hareketi – Denge Durumuna Yaklaşım.

Python dosyasını indir: Klasörden indir (10.1, 10.2, 10.3 aynı klasörde birlikte)

“Bir Molekülün Brown Hareketi” çalışmasında ise moleküller kutunun tamamına yerleştirilir; her molekülün 300 adım boyunca izlediği tam yörünge kaydedilir ve ayrıca – özgün BASIC programındaki 1600 REM YÖRÜNGELER VE ÇİZELGELER bölümüyle aynı mantıkla – yönünü değiştirdiği her nokta (bir başka molekülle çarpışma *ya da* kabin kenarından sekme) adım numarası ve konumuyla birlikte ayrıca listelenir; öğrenci böylece yörüngeyi çizerken sadece köşe noktalarını işaretleyebilir.

```

1 from brown_ortak import (
2     GENISLIK_TAM, baslangic_hizlari, molekulleri_yerlestir,
3     bir_adim_ilerlet,
4 )
5
6
7 def bir_molekulun_brown_hareketi(N=48, adim_sayisi=300, r=8):

```

```

8      """Molekulleri kutunun tamamına yerleştirir ve adim_sayisi
9      kadar ilerletir. Her molekul için tam yorungeyi ve yon
10     degistirdigi noktaları -- baska bir molekulle carpisma ya da
11     kabin kenarından sekme, (adim, x, y) olarak -- kaydeder (ozgun
12     programdaki 1600 REM YORUNGELER VE CIZELGELER blogunun
13     karsiligidir)."""
14     x, y = molekulleri_yerlestir(N, r, sol_yariya_sinirla=False)
15     vx, vy = baslangic_hizlari(N)
16
17     yorungeler = [(x[i], y[i])] for i in range(N)
18     yon_degisim_noktalari = [[] for _ in range(N)]
19
20     for adim in range(1, adim_sayisi + 1):
21         carpanlar, sekenler = bir_adim_ilerlet(x, y, vx, vy, r, genislik=GENISLIK_TAM)
22         for i in range(N):
23             yorungeler[i].append((x[i], y[i]))
24         degisenler = sekenler | {i for cift in carpanlar for i in cift}
25         for i in degisenler:
26             yon_degisim_noktalari[i].append((adim, x[i], y[i]))
27
28     return yorungeler, yon_degisim_noktalari
29
30
31 if __name__ == "__main__":
32     yorungeler, yon_degisimleri = bir_molekulun_brown_hareketi()
33     for i, noktalar in enumerate(yon_degisimleri):
34         print(f"Molekul {i + 1}: {len(noktalar)} yon degisimi (carpisma/duvardan sekme
35             )")
36         for adim, x_, y_ in noktalar:
37             print(f" adim={adim:4d} (x, y) = ({x_:.1f}, {y_:.1f})")

```

Program 10.3. Brown Molekül Hareketi – Bir Molekülün Brown Hareketi.

Python dosyasını indir: Klasörden indir (10.1, 10.2, 10.3 aynı klasörde birlikte)

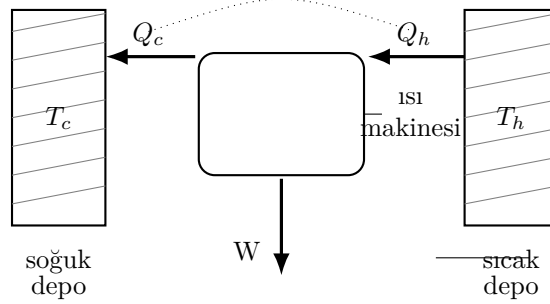
Yukarıdaki iki program, ortak fizik fonksiyonlarını `brown_ortak.py` adıyla kaydedilmiş olan Program 10.1'den içe aktarır (`import`). Elde edilen yörünge verileri, Çizelge 10.2'deki iki çarpışma arası mesafelerin hesaplanmasında ve $n = f(j)$ grafiğinin çiziminde doğrudan kullanılabilir.

Deney No : 11

Deneyin Adı: Carnot Isı Makinesi

Kuramsal Bilgiler

Bir ısı makinesi termal enerjiyi işe çevirir. İlk olarak ısı sıcak bir depodan çıkarılır. Bu ısının bir kısmı yapılacak iş için kullanılır ve kalanı soğuk bir depoya aktarılır. Bu süreç, şema olarak, Şekil 11.1’de gösterilmiştir.



Şekil 11.1 Isı makinesinin şematik gösterimi.

Burada T_h , sıcak deponun sıcaklığı; T_c , soğuk deponun sıcaklığı; Q_h , sıcak depodan çıkan ısı; Q_c , soğuk depoya aktarılan ısı ve W , yapılan iştir.

Enerjinin korunumuna göre (termodinamiğin 1. yasası);

$$Q_h = W + Q_c \quad (11.1)$$

'dir. Diğer bir deyişle, makineye giren ısı, yapılan iş ile soğuk depoya aktarılan ısının toplamıdır.

Bir ısı makinesinin verimi, yapılan işin sıcak kaynaktan çıkarılan ısıya oranı olarak tarif edilir.

$$\text{Verim} = \eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} \quad (11.2)$$

Yalnızca 1. yasaya dayanarak tüm ısının niçin işe çevrilmediğinin sebebi yoktur. Eğer bu durum olsaydı $Q_h = W$ olacaktı ve maksimum verim bir(1)'e (%100 verim) eşit olacaktı. Termodinamiğin 1. yasası makine verimine sınırlama olmasaydı, soğuk depoya gerek kalmazdı ve enerji kaybedilmezdi. Ama, Carnot soğuk bir deponun daima gerekli olduğunu gösterdi. Ayrıca bir ısı makinesinin teorik maksimum veriminin sadece iki deponun sıcaklıklarına bağlı olduğunu da gösterdi:

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_h - T_c}{T_h} \quad (11.3)$$

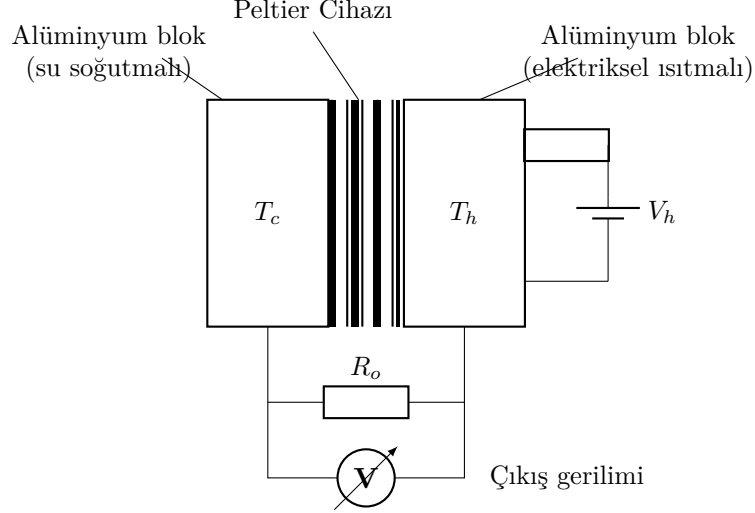
Burada sıcaklıklar, Kelvin(K) olarak ölçülür. Carnot'un sonucuna göre; bir makine, daima %100 verimli olabilir, ama sadece çok düşük sıcaklıkta (T_c , 0 K olduğunda). Bu sıcaklık pratik olarak gözlenemediğinden, gerçek bir makine bir(1)'e eşit bir verime sahip olamaz.

Şüphesiz ki, makine verimine başka sınırlamalar da vardır. Herhangi bir gerçek ısı makinesinde daima kaçınılmaz enerji kayıpları vardır. Enerji sürtünme, ısı iletimi, ısısal radyasyon vb. yollarla harcanır. Bunlar enerji kaybına neden olan fiziksel olaylardır. Bu kayıpların tümü verimi düşürür. Ama bunlar makinenin çalışması ile iç mekanizmalara bağlı olan pratik düşüncelerdir. Daha iyi dizayn, daha iyi yağlayıcı maddeler, daha iyi yalıtma vb. ile bunlar en

aza indirilebilir. Carnot verimi, herhangi bir ısı makinesinin verimine bir üst sınır getirir. Her ısı makinesi iki sıcaklıkta çalışmalıdır ve bu sıcaklıklar makine verimini sınırlar.

Termal verim cihazı (ısı makinesi)

Bir ısı makinesi olarak çalışan termal verim cihazının bir şeması Şekil 11.2’de verilmiştir. Anahtar element, Peltier cihazı olarak bilinen bir termoelektrik dönüştürücüdür. Isıyı elektriksel enerjiye veya elektriksel enerjiyi ısıya çeviren, basit yarıiletken bir alettir.



Şekil 11.2 Bir ısı makinesi olarak termal verim cihazı.

Peltier cihazı, ideal bir ısı makinesi gibi, iki sıcaklık arasında çalışır. İdeal bir ısı makinesinde, sabit sıcaklıklar son derece geniş, sıcak ve soğuk depolar tarafından korunurlar. Çünkü onlar o kadar büyüktür ki, ısı kendi sıcaklıklarını etkilemeksizin onlardan alınır ya da onlara verilir. Bu durumun benzetişimi için, Peltier cihazı iki alüminyum blok arasına sıkıştırılmıştır. Birinci blok (soğuk depo), ondan sabit bir soğuk sıcaklıkta buzlu su geçirilerek muhafaza edilir. Diğer blok ise (sıcak depo), bir ısıtıcı direnç kullanılarak sabit bir sıcaklığa kadar ısıtılır. T_h ve T_c sıcaklıkları alüminyum bloktaki termistörlerle ölçülür. Sıcaklığa karşılık direnç değerlerini gösteren tablo cihaz üzerinde verilmiştir.

Termal verim cihazı bir ısı makinesi olarak kullanılırken daha yüksek sıcaklık T_h , değişik değerlere set edilir. Makineye sıcak giriş P_h , voltaj ve sıcak alüminyum bloğu ısıtan ısıtıcı direncine giren akım gözlenerek ölçülür ($P_h = V_h I_h$).

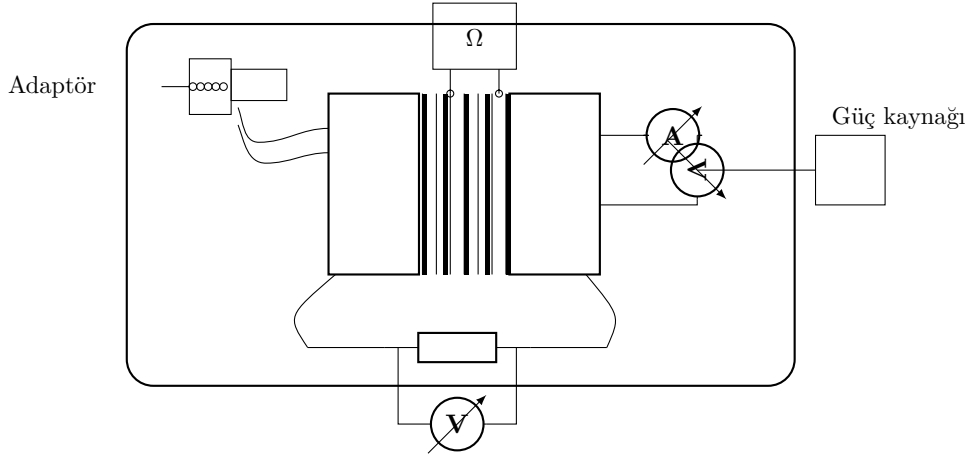
Makine tarafından yapılan iş, Peltier cihazı tarafından üretilen elektriksel enerjidir. Cihaz bir yük direnci R_o , boyunca bir akım sürer ve böylece, iş sonunda dirençte ısıya dönüştürülür. Dirence karşılık voltaj ölçülerek, cihaz tarafından yapılan iş bulunabilir ($P_w = V_w^2 / R_o$). Isı makinesinin gerçek verimi,

$$\eta_{\text{gerçek}} = \frac{P_w}{P_h} \quad (11.4)$$

ifadesinden hesaplanır.

Deneyin Yapılışı

Şekil 11.3’ten yararlanarak;



Şekil 11.3. Deney düzeneği.

1) Buzlu su banyosunu hazırlayınız ve termal verim cihazının her iki lastik tüpünü bu banyoya batırınız.

2) Adaptörü (9 V) prize takınız ve termal verim cihazı üzerindeki pompaya aktif ucu bağlayınız. Şimdi çalışan pompayı ısıtmelisiniz ve su “out” adlı lastik hortumdan çıkmalıdır.

3) Ohmmetreyi termistör terminallerine bağlayınız.

4) DC güç kaynağını, bir voltmetre ve bir ampermetreyi ısıtıcı terminallerine bağlayınız. V_h voltajını yaklaşık 11 V’a ayarlayınız.

DİKKAT! Bu değer, yaklaşık maksimum izinli sıcaklığı sağlamak içindir. 12 V’tan daha düşük bir gerilim değeri, bu deney için uygundur. Termal verim aleti 80°C ’nin üstünde 5 dakikadan daha fazla çalıştırılmamalıdır. Eğer 93°C ’yi aşarsa bir termal anahtar aleti korumak için otomatik olarak ısıtıcı akımını kapatır.

5) Şekildeki gibi, kısa bir kablo ile 2Ω ’luk R_o yük direncinin bağlantısını yapınız. Aynı yük direncine bir voltmetre bağlayınız. 2Ω değerinin seçimi keyfidir, başka bir yük direnci de kullanılabilir.

6) Sıcak ve soğuk depo sıcaklıklarının sabit olması için sistemin dengeye gelmesine izin veriniz. Bu, başlangıç sıcaklığına bağlı olarak, 5-10 dakika sürebilir.

7) Sıcak ve soğuk her bir ısı bloğunun termistör direncini ölçmek için, ohmmetreyi uygun bir şekilde, kendi anahtarı ile anahtarlayınız. Okumalarınızı (R_h ve R_c) Çizelge 11.1’e kaydediniz. Cihazın ön tarafındaki çizelgeyi ya da Çizelge 11.3’ü kullanarak, direnç değerlerini sıcaklıklara dönüştürünüz ve bu sıcaklıkları Çizelge 11.1’e işleyiniz.

8) Isıtma direncine karşılık gelen gerilimi (V_h), akımı (I_h) ve yük direncine karşılık gelen gerilimi (V_w) Çizelge 11.1’e işleyiniz.

9) Beş ayrı sıcaklık için, V_h gerilimini gittikçe düşürerek ve her seferinde yukarıdaki sırayı takip ederek, ölçümlerinizi tamamlayınız.

10) Sıcak depoya verilen P_h güçlerini ve yük direnci (R_o) tarafından kullanılan P_w güçlerini hesaplayarak, bu değerleri Çizelge 11.1’e işleyiniz.

11) (11.4) ifadesinden, gerçek verimleri hesaplayınız ve sonuçlarınızı Çizelge 11.2’ye işleyiniz.

12) Sıcaklıklarınızı Kelvin(K)’e çeviriniz ve Carnot verimlerini (11.3) ifadesinden yararlanarak hesaplayınız. Sonuçlarınızı Çizelge 11.2’ye işleyiniz.

13) Grafik için $1/T_h$ değerlerini hesaplayınız ve bunları Çizelge 11.2’ye işleyiniz.

14) Deneyinizde yüksek sıcaklık değişirken düşük sıcaklığın bağlı olarak sabit kaldığı farz edilirse Carnot verimi doğrudan $1/T_h$ ile orantılı olacaktır. $1/T_h$ ’ya karşılık Carnot verimini ve yine $1/T_h$ ’ya karşılık gerçek verimi çiziniz. Bu iki verim arasında 10’luk bir faktör farkının varlığına rağmen aynı grafik kağıdı üzerine çizim yapılabilir.

15) Sonuçlarınızı ve çizimlerinizi yorumlayınız.

Çizelge 11.1. Deney verileri ve hesaplamalar.

Ölçüm No	R_h (k Ω)	R_c (k Ω)	T_h (°C)	T_c (°C)	V_h (V)	I_h (A)	V_w (V)	P_h (W)	P_w (W)
1									
2									
3									
4									
5									

Çizelge 11.2. Grafik için değerlendirme.

Deney No	T_h (K)	T_c (K)	$\eta_{\text{gerçek}}$	η_{Carnot}	$1/T_h$ (K ⁻¹)
1					
2					
3					
4					
5					

Çizelge 11.3. Termistör Direnci-sıcaklık çizelgesi.

kΩ	°C	kΩ	°C	kΩ	°C	kΩ	°C	kΩ	°C
461	-5	146	17	53,2	39	21,7	61	9,76	83
436	-4	139	18	51,0	40	20,9	62	9,43	84
413	-3	133	19	48,9	41	20,1	63	9,12	85
391	-2	126	20	46,8	42	19,3	64	8,81	86
370	-1	120	21	44,9	43	18,6	65	8,52	87
351	0	115	22	43,0	44	17,9	66	8,24	88
332	1	109	23	41,2	45	17,3	67	7,96	89
315	2	104	24	39,6	46	16,6	68	7,70	90
298	3	100	25	37,9	47	16,0	69	7,45	91
283	4	95,4	26	36,4	48	15,5	70	7,21	92
269	5	91,1	27	34,9	49	14,9	71	6,98	93
255	6	87,0	28	33,5	50	14,4	72	6,75	94
242	7	83,1	29	32,2	51	13,8	73	6,53	95
230	8	79,4	30	30,9	52	13,4	74	6,33	96
218	9	75,9	31	29,7	53	12,9	75	6,12	97
207	10	72,5	32	28,5	54	12,4	76	5,93	98
197	11	69,3	33	27,4	55	12,0	77	5,74	99
187	12	66,3	34	26,4	56	11,6	78	5,56	100
178	13	63,4	35	25,3	57	11,2	79	5,39	101
169	14	60,7	36	24,4	58	10,8	80	5,22	102
161	15	58,1	37	23,4	59	10,4	81	5,06	103
153	16	55,6	38	22,5	60	10,1	82	4,91	104

NOT: Gerçek sıcaklık okuması yapmak için interpolasyon yapmaya ihtiyac duyacaksınız. Örneğin, ohmmetrenin termistör direncini 119 kΩ olarak okuduğunuzu farz ediniz. Bu değer, 120 kΩ (21 °C) ve 115 kΩ (22 °C) arasında kalır. Aranılan sıcaklık değeri,

$$T = (T_{\text{büyük}} - T_{\text{küçük}}) \frac{R_{\text{büyük}} - R}{R_{\text{büyük}} - R_{\text{küçük}}} + T_{\text{küçük}}$$

ifadesi yardımıyla, 21,2 °C'ye karşılıktır.

KAYNAKLAR

- 1- REIF F, Çev: DURLU, T.N., ELERMAN, Y., 1997. İstatistik Fizik, Berkeley Fizik Dersleri-Cilt 5, Bilim Yayınevi.
- 2- ÇİMENÖĞLU, M. A., YALÇINER, A., KIVRAK, A., 1992. Otomatik Sıcaklık Kontrol Sistemi, TFD-13 Ulusal Fizik Kongresi, Poster Bildiri.
- 3- University Laboratory Experiments, Physics, PHYWE, Vol. 1-5, 1995.
- 4- Instruction Manual and Experiment Guide For The Pasco Scientific, Model TD-8564, 1991.